Università di Tor Vergata – Dipartimento di Matematica

Note del Corso di Analisi Matematica 1*

Alberto Berretti

Parte IV.
Limiti e funzioni continue

1. La nozione di limite

In questo capitolo entriamo in argomento, introducendo i concetti di base dell'analisi matematica, e cioè i concetti di limite e di continuità. È utile iniziare motivando le definizioni che verranno fatte, in modo che esse appaiano come qualcosa di naturale.

Ci siamo spesso imbattuti, discutendo l'andamento di una funzione, in affermazioni del tipo "se x diventa grande, tanto grande, grande quanto ci pare, allora $f(x)$ diventa arbitrariamente vicina a l", oppure "se x diventa vicino a x_0, tanto vicino quanto ci pare, allora $f(x)$ diventa arbitrariamente grande", "al variare di x in un intervallo $f(x)$ varia senza fare salti" e cosí via. Si tratta ovviamente di affermazioni qualitative, in quanto in matematica (ma non solo! anche in fisica...) "grande" e "piccolo" non vogliono dire nulla come concetti assoluti: solo "più grande di" e "più piccolo di" vogliono dire qualcosa.

È necessario dunque dare un senso matematicamente solido ad affermazioni – del tutto qualitative – del tipo di quelle fatte sopra.

1.1. Definizione matematica di limite

Consideriamo la successione $c_n = 1/n$, e chiediamoci "a cosa *si avvicina* c_n quando *n cresce sempre di piú*?" Ora, è piuttosto evidente che man mano n cresce senza limite alcuno, i valori di c_n diminuiranno

 Ringrazio il Prof. Roberto Zanasi (`http://proooof.blogspot.com/`) per molti utili suggerimenti volti a migliorare la qualità di questo testo.

sempre di piú. Fino a quanto? è abbastanza evidente che c_n diventerà arbitrariamente vicino a 0 man mano che n cresce, ma questo modo di esprimersi rientra ancora nel linguaggio comune e non nel linguaggio rigoroso della matematica.

Un modo piú preciso per dirlo è il seguente: *possiamo rendere c_n vicino a 0 quanto vogliamo purché prendiamo n sufficientemente grande*. Perché questo è un modo piú preciso per dirlo? perché le affermazioni di "vicinanza" e "grandezza", altrimenti totalmente relative, ora sono opportunamente precisate da "quanto vogliamo" e "sufficientemente". In altri termini, l'affermazione che "c_n si avvicina a 0 man mano che n cresce" può essere formulata in modo (quasi) rigoroso dicendo la cosa seguente:

Posso avere c_n distante da 0 meno di un numero positivo ε qualsiasi, purché io prenda n piú grande di un certo N.

Ovviamente l'N che deve essere superato da n affinché c_n sia distante da 0 meno di ε dipenderà da ε stesso: piú piccolo è l'ε scelto, piú grande sarà, *tipicamente*, N (potrebbe in casi particolari rimanere costante). Nel caso specifico della successione da noi considerata, basta che n sia maggiore di $1/\varepsilon$ affinché c_n sia compreso tra 0 e ε, per cui possiamo prendere N pari a qualsiasi numero maggiore di $1/\varepsilon$.

Ciò si può formulare in termini matematici come segue:

Per ogni ε positivo esiste un numero N tale che se $n > N$ allora $0 < c_n < \varepsilon$.

È necessario ora liberarci dall'esempio concreto della specifica successione considerata, e dare finalmente la definizione formale di limite, prima per una successione e poi per una funzione.

Data una successione c_n, diremo che:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l$$

se:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{tale che} \quad n > N \Rightarrow |c_n - l| < \varepsilon.$$

Si osservi che dire $n > N$ vuol dire affermare che n è piú grande di N, e dire che $|c_n - l| < \varepsilon$ vuol dire affermare che c_n dista da l meno di ε (cioè è "vicino" a l!). Quindi secondo la definizione data, c_n tende a l se per possiamo rendere c_n vicino a l quanto vogliamo, cioè distante meno di un $\varepsilon > 0$ arbitrario, purché n sia sufficiente grande, cioè maggiore di un N che naturalmente dipende da ε.

Si osservi inoltre che $\lim_{n\to\infty} c_n = l$ non vuol dire né che per qualche n $c_n = l$, né il contrario, e cioè che c_n non è mai pari ad l. Semplicemente il limite di c_n può essere o no un valore assunto dalla successione.

A volte ci interessa dire che una successione c_n assume valori arbitrariamente grandi, e positivi, o arbitrariamente grandi, e negativi, man mano che n cresce. A tale scopo introduciamo le seguenti definizioni.

Data una successione c_n, diremo che:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists N \quad \text{tale che} \quad n > N \Rightarrow c_n > M.$$

Data una successione c_n, diremo che:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists N \quad \text{tale che} \quad n > N \Rightarrow c_n < -M.$$

Cosa ci dicono queste due definizioni? La prima ci dice che possiamo rendere c_n *arbitrariamente grande*, cioè maggiore di un M arbitrariamente scelto, purché si prenda n sufficientemente grande, cioè maggiore di un N che dipende ovviamente da M. La seconda ci dice che possiamo rendere c_n *arbitrariamente grande in valore assoluto e negativo*, cioè minore di un numero negativo $-M$, $M > 0$ arbitrariamente scelto, purché di nuovo si prenda n sufficientemente grande, cioè maggiore di un N che dipende ovviamente da M.

Osservazione 1. Lo studente rifletta sul fatti che nelle due definizioni appena date la condizione $M > 0$ è irrilevante e potrebbe essere omessa. Continui a rifletterci finché non l'ha capito: se so già dimostrare che, ad es., $c_n > 100$ quando $n > 1000$, è evidente allora che sempre per $n > 1000$ c_n è maggiore di qualsiasi numero negativo! Nel seguito a volte metteremo la condizione $M > 0$ perché ci aiuta a focalizzare la dimostrazione del limite dato nella direzione giusta, ma aggiungerla non è essenziale.

Affermare che il limite della successione c_n è l, pertanto, vuol dire avere a disposizione un meccanismo, una specie di "scatola nera", in cui "entra" la "tolleranza" che imponiamo a c_n (quanto ammettiamo che c_n possa essere al massimo distante dal valore del limite l), ed "esce" la condizione che dobbiamo imporre su n affinché la tolleranza desiderata sia ottenuta. *Mutatis mutandis* se il limite è $\pm\infty$.

Si noti che non ha senso parlare di limite di una successione per n che tende a qualcosa di diverso da ∞: infatti n, essendo una variabile *discreta*, non può *avvicinarsi* ad uno specifico numero intero n_0: o è uguale a n_0, o dista da n_0 al minimo 1.

In modo analogo possiamo definire il limite di una *funzione* $f(x)$ quando x tende ad un numero x_0 o a $\pm\infty$. In tal caso, però, abbiamo una difficoltà aggiuntiva. Quando consideriamo il limite per x che tende ad un numero reale x_0, allora devono essere chiari i seguenti punti. Innanzitutto, non c'è alcuna ragione per la quale il numero x_0 debba far parte del dominio della funzione: ad es. se vogliamo prendere il limite per x che tende a 0 della funzione $1/x$, è evidente che si tratta di una richiesta perfettamente legittima anche se $x = 0$ non fa parte del dominio della funzione (analogamente, ∞ non è un numero e purtuttavia facciamo il limite per $n \to \infty$ di una successione!). D'altra parte, è chiaro che se chiedo di fare il limite per $x \to 2$ di una funzione come $\sqrt{1-x^2}$, che è definita solo per $-1 \leq x \leq 1$, ci stiamo ponendo una domanda priva di senso: infatti al punto in cui voglio calcolare il limite, e cioè 2, non ci posso arrivare *arbitrariamente vicino*. Pertanto richiederemo che, se vogliamo definire i limite per x che tende a x_0 di una funzione $f(x)$, la funzione f sia definita *almeno* in un intervallo I di cui x_0 fa parte, o di cui è uno degli estremi pur senza farne parte (ad es. se f non è definita in x_0); se invece vogliamo definire il limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, allora richiederemo che la funzione f sia definita *almeno* per un intervallo illimitato della forma $(M, +\infty)$, o rispettivamente $(-\infty, M)$. Piú avanti vedremo che c'è un modo piú preciso e rigoroso di porre una condizione sul dominio della funzione per poterne definire il limite per $x \to x_0$ o $x \to \pm\infty$.

Chiarito quanto precede, definiamo i limiti per $x \to x_0$ di una funzione, in analogia con quanto abbiamo fatto per i limiti di successioni.

Nelle seguenti definizioni, come abbiamo spiegato nel paragrafo precedente, supponiamo che il dominio della funzione $f(x)$ contenga un insieme del tipo $I \backslash \{x_0\}$, cioè un intervallo I da cui abbiamo tolto il punto x_0, perché, come abbiamo visto, vogliamo poter calcolare il limite di una funzione anche quando il punto x_0 non fa parte del dominio, ma ci possiamo avvicinare ad esso arbitrariamente rimanendo nel dominio medesimo. Abbiamo allora le seguenti definizioni.

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Leggiamo bene cosa abbiamo scritto. Abbiamo scritto che *per ogni* $\varepsilon > 0$ possiamo avere $f(x)$ distante da l meno di ε, cioè che possiamo avere $f(x)$ vicino a l quanto ci pare, purché prendiamo

x distante da x_0 meno di δ, cioè purché prendiamo x *sufficientemente vicino* a x_0. A quale scopo chiediamo $|x - x_0| > 0$? Lo chiediamo perché *dobbiamo* imporre che l'x qualsiasi sufficientemente vicino a x_0 *non sia* x_0, in quanto è possibile che f non sia nemmeno definita in x_0, e comunque *il valore del limite non ha a che fare necessariamente qualcosa con il valore della funzione qualora questo esista, in generale*. Ripetiamo: il fatto che la funzione f sia definita o meno in x_0 è totalmente irrilevante allo scopo di definire il limite di f: non solo f può essere o non essere definita in x_0, ma nel caso in cui sia definita in x_0 il suo valore in tale punto è totalmente irrilevante allo scopo di sapere quant'è il suo limite (essendo il punto x_0 escluso dall'insieme dei valori di x in cui calcoliamo la f!).

Analogamente abbiamo i limiti infiniti:

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Ovviamente dobbiamo definire i limiti quando, come nelle successioni, x tende a $\pm\infty$. Sempre in analogia con quanto abbiamo fatto nelle successioni, abbiamo allora le seguenti definizioni.

Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x > L \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x > L \Rightarrow f(x) > M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x > L \Rightarrow f(x) < -M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x < -L \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x < -L \Rightarrow f(x) > M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad x < -L \Rightarrow f(x) < -M.$$

Quando abbiamo definito il limite per $x \to x_0$, abbiamo assunto che f sia definita sia a destra che a sinistra di x_0 – ma non necessariamente in x_0, ripetiamolo ancora! –, e abbiamo richiesto che f si avvicini arbitrariamente a l purché x sia sufficientemente vicino a x_0, *senza specificare da quale lato x debba avvicinarsi a x_0*. Ovviamente potrebbe accadere che il limite sia diverso se x si avvicina ad x_0

da un lato o dall'altro, o che il limite esista da un lato ma non dall'altro. Per questa ragione conviene introdurre il concetto di *limite da destra* e di *limite da sinistra* come segue.

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

SE:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{TALE CHE} \quad -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > M.$$

DIREMO CHE:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

SE:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{TALE CHE} \quad -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < -M.$$

La scrittura $x \to x_0^+$ si legge "x tende a x_0 da destra", mentre l'espressione $x \to x_0^-$ si legge "x tende a x_0 da sinistra". Si osservi che invece di scrivere $0 < |x - x_0| < \delta$ possiamo anche scrivere $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$; invece di scrivere $0 < x - x_0 < \delta$ possiamo scrivere $x_0 < x < x_0 + \delta$, ed invece di scrivere $-\delta < x - x_0 < 0$ possiamo scrivere $x_0 - \delta < x < x_0$.

Infine, a volte ci può far comodo caratterizzare *come* $f(x)$ – o anche una successione c_n – tende a l: e cioè dire se tende a l per valori maggiori di l, cioè si avvicina ad l dall'alto, o per valori minori di l, cioè si avvicina ad l dal basso (si osservi che potrebbe non interessarci, o potrebbe tenderci *oscillando*). In tal caso scriveremo che il limite è "l^+" o rispettivamente "l^-", e nella definizione sostituiremo la condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$ – ovvero per le successioni $|c_n - l| < \varepsilon$ – con, rispettivamente, le condizioni $l < f(x) < l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon < f(x) < l$ ($l < c_n < l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon < c_n < l$, naturalmente, per le successioni).

Se un limite di successione o di funzione esiste ed è un numero reale l, si dice che è CONVERGENTE; nel caso di successioni, si dice che la successione medesima è convergente. Se il limite ovvero la successione non è convergente si dice che è DIVERGENTE. Talora si riserva la parola "divergente" per indicare il fatto che il limite è $\pm\infty$, e in caso il limite non esista (nel senso che non è nemmeno infinito) si dice che la successione (o la funzione) OSCILLA.

Osservazione 2. Il δ (o lo L) che appare nella definizione di limite dipende *in generale* da ε (o da M), cioè *ovviamente* quanto devo prendere vicino x a x_0 se il limite è per $x \to x_0$, quanto devo prendere grande x se il limite è per $x \to \pm\infty$, dipende *in generale* da ε (o da M, se il limite non è un valore finito ma $\pm\infty$). Pertanto potremmo talvolta far notare tale aspetto scrivendo δ_ε, oppure L_ε, e notazioni analoghe per gli altri casi. È **importante** anche notare che non è affatto necessario che il valore di δ che dobbiamo determinare per stabilire un certo limite (o di N se è un limite all'infinito) dipenda *in modo ottimale da* ε, cioè che per $0 < |x - x_0| < \delta$ valga $|f(x) - l| < \varepsilon$ *ma se* $|x - x_0| > \delta$ *no*; in altri termini, la condizione $0 < |x - x_0| < \delta$ deve essere una condizione *sufficiente* per avere $|f(x) - l| <$

ε, ma non deve essere necessariamente anche *necessaria*; se, in parole povere, ho dimostrato che $|f(x) - l| < \varepsilon$ quando $0 < |x - x_0| < \delta$, ho già dimostrato il limite, ed il fatto che $|f(x) - l| < \varepsilon$ anche quando, tanto per fare un esempio, $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ è irrilevante. Questo fatto ritorna utile in pratica, quando vogliamo calcolare qualche limite direttamente dalla definizione e dobbiamo fare delle stime (maggiorazioni o minorazioni): queste non dovranno essere ottimali, potranno essere anche molto grezze. Applicheremo questo principio molte volte nel seguito.

Osservazione 3. **Importante:** Se dico che il limite per $x \to x_0$ – ma negli altri casi la situazione è assolutamente identica – è l, sto dicendo, come abbiamo visto, che posso prendere $f(x)$ vicino ad l quando voglio purché io prenda x vicino a x_0 quanto necessario. Abbiamo scritto la cosa in modo formale dicendo che $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$; a parole, se prendiamo $x \neq x_0$ distante a x_0 meno di δ, allora $f(x)$ dista da l meno di ε, *ed un tale δ esiste sempre, per ogni ε*. Ne segue che se definissi il limite dicendo che ad es. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 2\varepsilon$, o $< 3\varepsilon$, o $< \varepsilon/2$, o addirittura $< \varepsilon^2$ *non cambierebbe assolutamente nulla* e la definizione di limite sarebbe la stessa. Infatti, considerata l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, se riesco a rendere una determinata quantità minore di 2ε chiunque sia $\varepsilon > 0$, è evidente che riesco a renderla minore di ε, di $\varepsilon/2$, di ε^2, etc. (è necessario essere ben convinti di questo fatto e si prega di rifletterci sopra un attimo). Talora si usa l'espressione “utilizzare l'arbitrarietà di ε” per indicare questa situazione.

Se ad es. scegliendo un certo $\delta = \delta_\varepsilon$ riesco a rendere $|f(x) - l| < 2\varepsilon$ purché $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, allora basta prendere $0 < |x - x_0| < \delta_{\varepsilon/2}$ per avere $|f(x) - l| < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon$.

Analogamente se per dimostrare che c_n tende a ∞ ricaviamo che $\forall M > 0\ c_n > 2M$, o $c_n > M/2$, o $c_n > M^2$, è la stessa cosa, “per l'arbitrarietà di M”.

Osservazione 4. **Importante:** Il fatto che una successione sia convergente, divergente, oscillante, ed in caso sia convergente il fatto che converga ad l non cambia se modifichiamo i primi N elementi della successione, per quanto grande sia N. Infatti nella definizione di limite appare una proprietà che deve essere valida per $n > M$, per qualche M; quindi se modifico i primi N elementi della successione, la proprietà in questione (ad es. $|c_n - l| < \varepsilon$) continua a valere, per $n > \max\{N, M\}$. Ne segue che, quando enunceremo dei teoremi sui limiti che dipendono da qualche proprietà della successione, è in realtà sufficiente che tale proprietà sia valida se $n > N$, per qualche N, e non che sia realmente valida per *ogni n*. Talora in questi casi si dice che la proprietà in questione vale DEFINITIVAMENTE (“definitivamente” = “a partire da un certo valore dell'indice in poi”).

2. Proprietà dei limiti

Dopo aver definito il limite, dimostriamo le principali proprietà ed i principali teoremi sui limiti. Prima di calcolare anche i limiti piú elementari, infatti, dovremo avere a nostra disposizione degli strumenti che ci permettano di ricavare il limite *senza dover passare attraverso la definizione*, cioè senza dover trovare ad es. un $\delta > 0$ che dipende da un $\varepsilon > 0$ tale che *etc.*, altrimenti non riusciremo a calcolare se non i limiti piú banali a caro prezzo.

2.1. Unicità del limite

Se una successione, o una funzione, tende a limite l o $\pm\infty$ per $n \to \infty$ o per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$, *non può tendere contemporaneamente ad altro limite*. Tale affermazione, che sembra ovvia, va comunque dimostrata. Lo dimostriamo nel caso delle successioni che tendono a $l \in \mathbb{R}$, gli altri casi sono analoghi.

Teorema 1. *Se* $\lim_{n\to\infty} c_n = l_1$ *e* $\lim_{n\to\infty} c_n = l_2$, *allora* $l_1 = l_2$.

Dimostrazione. La dimostrazione è elementare. Assumiamo ad es. $l_1 < l_2$, allora $\exists\,\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < (l_2 - l_1)/2$ (minore cioè della metà della distanza tra l_1 e l_2), e quindi $l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon$. Ma $\forall\varepsilon > 0$, quindi anche per *questo* ε, esistono M_1, M_2 tali che se n è maggiore di entrambe allora:

$$l_1 - \varepsilon < c_n < l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon < c_n < l_2 + \varepsilon,$$

il che implica $c_n < c_n$ che è assurdo. Il caso $l_1 > l_2$ viene escluso in modo identico, per cui i due limiti non possono che essere uguali. □

2.2. Teorema della permanenza del segno

Iniziamo dal piú semplice teorema che possiamo dimostrare sui limiti. Il teorema della permanenza del segno ci dice che se un limite è positivo, o negativo, allora *vicino* al punto in cui calcoliamo il limite (ovvero per valori grandi dell'indice n della successione o della variabile x della funzione, se il limite è all'infinito) la funzione avrà il medesimo segno. Enunciamo il teorema e dimostriamolo nel caso in cui il limite è positivo (la dimostrazione nel caso in cui il limite è negativo è sostanzialmente identica).

Teorema 2 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia:*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l > 0.$$

Allora esiste N tale che:

$$n > N \Rightarrow c_n > 0.$$

Analogamente, se:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0 \text{ ovvero } \lim_{x\to-\infty} f(x) = l > 0$$

allora esiste N tale che:

$$x > N \Rightarrow f(x) > 0 \text{ ovvero } x < N \Rightarrow f(x) > 0.$$

Nel caso di limiti per $x \to x_0$ invece se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0,$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamolo esplicitamente solo nel caso del limite di successione e nel caso di limite di funzione per $x \to x_0$ (l'altro caso è simile).

Nel primo caso, abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \text{ tale che } n > M \Rightarrow l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon.$$

Basta quindi prendere $\varepsilon = l/2$ per avere $c_n > l - l/2 = l/2 > 0$ non appena $n > M$.

Nel secondo caso, abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Basta quindi prendere $\varepsilon = l/2$ per avere $f(x) > l - l/2 = l/2 > 0$ quando $0 < |x - x_0| < \delta$. □

Osservazione 5. Si osservi che se il limite è $+\infty$ invece di $l > 0$ il teorema continua a valere. Infatti avremo che $c_n > L > 0$ ovvero $f(x) > L > 0$ nella dimostrazione invece di $c_n > l/2 > 0$ ovvero $f(x) > l/2 > 0$.

Osservazione 6. Se c_n ammette limite e $c_n \geq 0$ allora $\lim_{n \to \infty} c_n \geq 0$; se $c_n > 0$ allora $\lim_{n \to \infty} c_n \geq 0$: il limite *può essere* 0; ad es. $c_n = 1/n > 0$ e $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$. In caso contrario sarebbe violato il teorema della permanenza del segno.

Osservazione 7. Se una successione è convergente allora è limitata. Infatti se la successione è convergente, allora $\forall \varepsilon \, \exists M$ tale che se $n > M$ allora $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Prendiamo allora $\varepsilon = 1$, e sia $K_1 = \min\{c_0, \dots, c_M\}$, $K_2 = \max\{c_0, \dots, c_M\}$. Quindi $\forall n$: $\min\{K_1, l - 1\} \leq c_n \leq \max\{K_2, l + 1\}$.

Analogamente (ed omettiamo la semplicissima dimostrazione, che può essere ricavata dallo studente per esercizio) se una successione tende a $+\infty$ allora è limitata inferiormente, se tende a $-\infty$ allora è limitata superiormente.

Osservazione 8. *Al contrario*, se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to \pm\infty$ *non è affatto detto che sia limitata!* Basta ad es. prendere $f(x) = \frac{1}{x}$: tende a 0 per $x \to \pm\infty$ ma non è limitata perché diverge in $x \to 0$.

2.3. Teorema del confronto

Enunciamo e dimostriamo il teorema del confronto per le successioni.

Teorema 3 (Teorema del confronto, successioni)**.** *Abbiamo:*

1. *Se $a_n \leq b_n$ definitivamente e $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$.*
2. *Se $a_n \leq b_n$ definitivamente e $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$.*
3. *Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e a_n, $c_n \to l$, allora anche $b_n \to l$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione. Abbiamo che $\forall L\, \exists M$ tale che $n > M \Rightarrow a_n > L$. Ma se $b_n \leq a_n$ per $n > N$, allora $n > \max\{M, N\} \Rightarrow b_n > L$ e quindi anche il limite di b_n è $+\infty$. La dimostrazione della seconda è praticamente identica.

Per quanto riguarda la terza, abbiamo che $\forall \varepsilon > 0\, \exists M$ tale che se $n > M$ allora $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Ma allora se $n > \max\{N, M\}$ $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$, e quindi anche b_n tende a l. □

Un teorema assolutamente identico, con ovvie differenze puramente "tecniche", vale per i limiti di funzioni. Per semplicità lo enunciamo e lo dimostriamo solo nel caso del limite per $x \to x_0$, ma la il caso $x \to \pm\infty$ è praticamente la stessa cosa.

Teorema 4 (Teorema del confronto, funzioni)**.** *Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ definite in $A = (x_0 - \eta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \eta)$ per qualche $\eta > 0$. Allora:*

1. *Se $f(x) \leq g(x)$ in A e $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$, allora anche $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$.*
2. *Se $f(x) \leq g(x)$ in A e $g(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$, allora anche $g(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$.*
3. *Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in A e $f(x)$, $h(x) \to l$ per $x \to x_0$, allora anche $g(x) \to l$ per $x \to x_0$.*

Dimostrazione. Anche la dimostrazione è praticamente identica. Per quanto riguarda il primo caso,$\forall L$ $\exists \delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > L$. Ma se in A $g(x) \geq f(x)$, allora preso $\overline{\delta} = \min\{\delta, \eta\}$, abbiamo che $0 < |x - x_0| < \overline{\delta} \Rightarrow g(x) \geq f(x) > L$ e quindi anche $g(x) \to +\infty$. Il secondo caso è analogo.

Per quanto riguarda il terzo caso, abbiamo che $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x), h(x) < l + \varepsilon$, e definendo $\overline{\delta}$ come sopra dunque abbiamo che $0 < |x - x_0| < \overline{\delta} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$, per cui anche $g(x) \to l$. □

L'insieme A nelle ipotesi del teorema del confronto per le funzioni gioca il ruolo dell'avverbio "definitivamente" nell'analogo teorema per le successioni.

Il teorema del confronto è uno strumento essenziale per il calcolo dei limiti. È necessario che lo studente ne abbia ben chiaro sia l'enunciato che la dimostrazione.

2.4. Operazioni algebriche sui limiti

Dimostriamo ora il teorema che ci permette di ricondurre il limite della somma, del prodotto, del quoziente e cosí via ai limiti elementari. Lo enunciamo e dimostriamo *nel caso delle successioni*, ma come al solito *il teorema vale anche per limiti di funzioni*, con una dimostrazione sostanzialmente identica.

Teorema 5. *Per $n \to \infty$:*

1. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n \to l$, allora $\alpha a_n \to \alpha l$.*
2. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $a_n \to +\infty$, allora $\alpha a_n \to +\infty$.*
3. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $a_n \to +\infty$, allora $\alpha a_n \to -\infty$.*
4. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $a_n \to -\infty$, allora $\alpha a_n \to -\infty$.*
5. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $a_n \to -\infty$, allora $\alpha a_n \to +\infty$.*
6. *Se $a_n \to l$, $b_n \to m$, allora $a_n + b_n \to l + m$.*
7. *Se $a_n \to +\infty$, b_n è limitata dal basso, allora $a_n + b_n \to +\infty$.*
8. *Se $a_n \to -\infty$, b_n è limitata dall'alto, allora $a_n + b_n \to -\infty$.*
9. *Se $a_n \to 0$, b_n è limitata, allora $a_n b_n \to 0$.*
10. *Se $a_n \to l$, $b_n \to m$, allora $a_n b_n \to lm$.*
11. *Se $a_n \to +\infty$ ed $\exists K > 0$ tale che definitivamente $b_n \geq K$, allora $a_n b_n \to +\infty$.*
12. *Se $a_n \to +\infty$ ed $\exists K < 0$ tale che definitivamente $b_n \leq K$, allora $a_n b_n \to -\infty$.*
13. *Se $a_n \to -\infty$ ed $\exists K > 0$ tale che definitivamente $b_n \geq K$, allora $a_n b_n \to -\infty$.*
14. *Se $a_n \to -\infty$ ed $\exists K < 0$ tale che definitivamente $b_n \leq K$, allora $a_n b_n \to +\infty$.*
15. *Se $a_n \to 0^+$, $a_n \neq 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.*
16. *Se $a_n \to 0^-$, $a_n \neq 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.*
17. *Se $a_n \to l \neq 0$, $a_n \neq 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to 1/l$.*
18. *Se $a_n \to l$, $b_n \to m \neq 0$, $b_n \neq 0$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{m}$.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni di molte delle affermazioni fatte nel teorema sono sostanzialmente identiche e differiscono solo per qualche segno, per cui dimostriamo solo i casi essenziali. *In questa dimostrazione è essenziale ricordarsi dell'osservazione 3, a cui non faremo riferimento esplicito ogni volta che la usiamo perché la usiamo praticamente in continuazione*.

Nel caso 1, abbiamo che se $n > M$, allora $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$; quindi se $\alpha > 0$, $\alpha a_n \in (\alpha l - \alpha\varepsilon, \alpha l + \alpha\varepsilon)$, se $\alpha < 0$, $\alpha a_n \in (\alpha l + \alpha\varepsilon, \alpha l - \alpha\varepsilon)$, e quindi in entrambe i casi il limite è αl. Se $\alpha = 0$, $\alpha a_n = 0$ $\forall n$ ed il limite è ovviamente $0 = \alpha l$.

Nel caso 2, abbiamo che se $n > M$, allora $a_n > L$; quindi se $\alpha > 0$, $\alpha a_n > \alpha L$ ed il limite è sempre $+\infty$. I casi 3, 4 e 5 sono identici.

Nel caso 6, se $n > M_1$ allora $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ e se $n > M_2$ allora $m - \varepsilon < b_n < m + \varepsilon$; quindi se $n > \max\{M_1, M_2\}$ sommando membro a membro le due disuguaglianze abbiamo $(l + m) - 2\varepsilon < a_n + b_m < (l + m) + 2\varepsilon$, che per l'arbitrarietà di ε è la tesi.

Nel caso 7, se $n > M$ allora $a_n > L$ e $b_n > K$, per cui $a_n + b_n > L + K$ e per l'arbitrarietà di L anche $a_n + b_n$ tende a $+\infty$. Il caso 8 è identico.

Nel caso 9, se $n > M$ allora $|a_n| < \varepsilon$ e $|b_n| \leq K$, per cui $|a_n b_n| < K\varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε anche $a_n b_n$ tende a 0.

Nel caso 10, poniamo $a_n b_n = ((a_n - l) + l)b_n = (a_n - l)b_n + lb_n$; ora, per il punto 6 $a_n - l$ tende a 0 mentre b_n ammette limite quindi è limitata, per cui per il punto 9 $(a_n - l)b_n$ tende a 0; per il punto 1 lb_n tende a lm, da cui la tesi.

Nel caso 11, se $n > M$ $a_n > L$ e se $n > N$ $b_n > K$, per cui se $n > \max\{M, N\}$ allora $a_n b_n > KL$ quindi per l'arbitrarietà di L anche $a_n b_n$ tende a $+\infty$. I casi 12, 13 e 14 sono analoghi.

Nel caso 15, se $n > M$ allora $0 < a_n < \varepsilon$ per cui $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè $a_n > L$ purché ε sia sufficientemente piccolo. Il caso 16 è analogo.

Nel caso 17, sia $b_n = a_n - l$, cosí $b_n \to 0$. Allora:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|b_n|}{|l||l + b_n|}.$$

Ora, il denominatore di quest'ultima frazione tende a l^2, per cui $\exists \overline{M}$ tale che se $n > \overline{M}$ allora $|l||b_n + l| > \frac{l^2}{2}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M'$ tale che se $n > M'$ allora $|b_n| < \varepsilon$, perché $b_n \to 0$. Quindi se $n > \max\{\overline{M}, M'\}$ allora:

$$\frac{|b_n|}{|l||l + b_n|} < \frac{2\varepsilon}{l^2},$$

da cui per l'arbitrarietà di ε la tesi.

Il caso 18 segue dal caso 10 e dal caso 17. □

2.5. Sottosuccessioni

Nella seconda parte abbiamo definito cos'è una sottosuccessione. Enunciamo ora un semplicissimo risultato sul limite delle sottosuccessioni di successioni di limite noto. Torneremo sull'argomento limiti di sottosuccessioni piú avanti in un altro contesto.

Teorema 6. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ *o* $\pm\infty$, *allora ogni sottosuccessione di* a_n *tende al medesimo limite.*

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M$ tale che se $n > M$ allora $|a_n - l| < \varepsilon$. Sia a_{n_k} una sottosuccessione di a_n, $n_k \nearrow +\infty$. Allora $\forall M > 0$ $\exists N$ tale che se $n > N$ allora $n_k > M$. Quindi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tale che se $n > N$ allora $n_k > M$ e quindi $|a_{n_k} - l| < \varepsilon$. □

2.6. Limite di funzioni composte

Consideriamo ora il limite di funzioni composte. Vale il seguente teorema.

Teorema 7. *Sia $h(x) = f(g(x))$, dove il dominio di f contiene il codominio di g. Sia $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$. Assumiamo inoltre che $\exists\beta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \beta$ allora $g(x) \neq y_0$. Allora $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$.*

Dimostrazione. Poiché $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$, abbiamo:

$$\forall\varepsilon\ \exists\eta : \quad 0 < |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon. \tag{1}$$

Poiché $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, ponendo $y = g(x)$ abbiamo:

$$\forall\eta\ \exists\delta : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |y - y_0| < \eta. \tag{2}$$

Avendo posto $y = g(x)$, dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$, e per tale $\eta > 0$ esiste un $\delta > 0$, tale che se $0 < |x - x_0| < \min(\beta, \delta)$ allora $|y - y_0| < \eta$ perché $0 < |x - x_0| < \delta$, e $0 < |y - y_0|$ perché $|x - x_0| < \beta$, e quindi $|f(y) - l| < \varepsilon$, e cioè la tesi. □

Ci si può chiedere l'origine dell'ipotesi secondo la quale deve esistere $\beta > 0$ tale che se $0 < |x-x_0| < \beta$ allora $g(x) \neq y_0$. Bisogna ricordare che nella (1) è richiesto, come deve essere per la definizione di limite, che sia $0 < |y - y_0| < \eta$, e la (2) ci assicura che solo la seconda disuguaglianza, non la prima (e cioè $y \neq y_0$), e quindi è necessaria un'ipotesi aggiuntiva. Per capire meglio questo fatto, facciamo un esempio.

Esempio 1. Sia $g(x) = 0$ identicamente, e sia:

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \neq 0, \\ 1 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Allora è evidente che $h(x) = f(g(x)) = 1$ identicamente, per cui $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$, anche se $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$, e non 1.

Il caso piú semplice, e quello che si manifesta piú frequentemente in pratica, è quello in cui $\exists\beta > 0$ tale che nell'insieme $\{0 < |x - x_0| < \beta\}$ la funzione $g(x)$ è monotona.

Se $g(x)$ è monotona nell'intervallo considerato, allora è anche invertibile. Se prendiamo $f(y) = g^{-1}(y)$, abbiamo quindi:

$$\lim_{x\to x_0} g^{-1}(g(x)) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

ma per il teorema 7:

$$\lim_{x\to x_0} g^{-1}(g(x)) = \lim_{y\to y_0} g^{-1}(y),$$

per cui:

$$\lim_{y\to y_0} g^{-1}(y) = x_0.$$

Sottolineiamo infine che il teorema 7 viene spesso utilizzato per calcolare i limiti “per sostituzione”; in altri termini, dovendo calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)$, cerchiamo una funzione $g(t)$, che soddisfi le ipotesi del teorema (e cioè in pratica invertibile dove necessario) tale che, scrivendo il limite dato come $\lim_{t\to t_0} f(g(t))$, la funzione composta $f(g(t))$ sia piú semplice della funzione originale $f(x)$.

2.7. Successioni e funzioni monotone

In molti casi, l’applicazione della definizione di limite risulta essere in pratica problematica perchè, per stabilire che una funzione o una successione ha un determinato limite *usando la definizione* occorre conoscere il valore del limite medesimo. In molti casi importanti, vogliamo dimostrare che una successione o una funzione ammette limite, senza che tale limite sia precedentemente noto. Il caso tipico, che affronteremo fra poco, è quello del numero e, definito appunto come limite di una successione, la cui esistenza dovrà essere dimostrata con altri mezzi in quanto non è precedentemente noto il valore del limite stesso.

Uno strumento prezioso da questo punto di vista (ma non l’unico) è il seguente teorema.

Teorema 8. *Sia $\{c_n\}$ una successione monotona crescente. Se c_n è limitata superiormente allora $\exists l \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} c_n = l$. Se c_n è illimitata superiormente allora $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Analogamente, se $\{c_n\}$ è monotona decrescente e limitata inferiormente allora ammette limite finito mentre se è illimitata inferiormente allora tende a $-\infty$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui la successione $\{c_n\}$ è limitata superiormente. In tal caso allora per la proprietà di completezza dei numeri reali esiste il suo estremo superiore:

$$\sup c_n = l.$$

Quindi $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$ tale che $l - \varepsilon < c_M \le l$, altrimenti $\sup c_n$ sarebbe *minore* di l. Ma se $l - \varepsilon < c_M \le l$ allora $\forall n > M$ deve essere ugualmente $l - \varepsilon < c_n \le l$; infatti essendo la successione crescente, $c_n \ge c_M > l - \varepsilon$, ed essendo l l’estremo superiore della successione deve essere $c_n \le l$. Abbiamo dunque dimostrato che $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$ tale che se $n > M$ allora $l - \varepsilon < c_n \le l$, e cioè la tesi.

Sia ora c_n illimitata. Dato dunque $L > 0\ \exists M$ tale che $c_M > L$. Ma essendo la successione crescente, $\forall n > M\ c_n \ge c_M > L$, e quindi la successione tende a $+\infty$ per la definizione di limite.

La dimostrazione nel caso di successioni decrescenti è analoga. □

Il teorema analogo per i limiti di *funzioni* monotone è analogo, e solo leggermente piú complesso per ragioni puramente tecniche che a questo punto dovrebbero essere evidenti.

Teorema 9. *Consideriamo l'intervallo* $(a,+\infty)$ *e sia la funzione* $f(x)$ *definita e monotona crescente in tale intervallo. Se è anche limitata superiormente, allora* $\exists l \in \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$*; se è illimitata superiormente, allora* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Consideriamo l'intervallo (a, x_0) *e sia la funzione* $f(x)$ *definita e monotona crescente in tale intervallo. Se è anche limitata superiormente, allora* $\exists l \in \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$*; se è illimitata superiormente, allora* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Risultati analoghi valgono per funzioni monotone decrescenti, per limiti a $-\infty$ *e per* $x \to x_0^-$.

Dimostrazione. La dimostrazione è praticamente identica al caso delle successioni. Se la funzione è limitata, allora essa ammette estremo superiore l. Ragionando come nel caso delle successioni, si verifica immediatamente che tale l è proprio il limite. Analogamente nel caso in cui la funzione è illimitata. ◻

Osservazione 9. Una funzione f monotona in (a,b) è limitata in ogni intervallo $[c,d]$, $a < c < d < b$ (infatti $\forall x \in [c,d]$ $f(c) < f(x) < f(d)$). Una funzione f monotona crescente nell'intervallo (a,b) è limitata superiormente in ogni intervallo $(a,c]$ (infatti $\forall x \in (a,c]$ $f(x) < f(c)$), ed è limitata inferiormente in ogni intervallo $[c,b)$ (infatti $\forall x \in [c,b)$ $f(c) < f(x)$). Una funzione f monotona decrescente nell'intervallo (a,b) è limitata inferiormente in ogni intervallo $(a,c]$ (infatti $\forall x \in (a,c]$ $f(x) > f(c)$), ed è limitata superiormente in ogni intervallo $[c,b)$ (infatti $\forall x \in [c,b)$ $f(x) < f(c)$).

2.8. Qualche disuguaglianza e alcuni limiti notevoli

Introduciamo ora alcune disuguaglianze che saranno molto utili nel seguito (v. G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, p. 143 e seg. e G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, p. 39 e seg.).

Sia $\alpha > 1$ e r un intero positivo. Allora è evidente che:

$$r\alpha^r > \alpha^{r-1} + \alpha^{r-2} + \ldots + 1;$$

infatti a destra abbiamo r addendi ciascuno minore di α^r. Moltiplicando ambo i membri per $\alpha - 1$ otteniamo:

$$r\alpha^r(\alpha - 1) > \alpha^r - 1,$$

e sommando $r(\alpha^r - 1)$ ad ambo i membri otteniamo:

$$r(\alpha^{r+1} - 1) > (r+1)(\alpha^r - 1).$$

Dividendo ambo i membri per $r(r+1)$ otteniamo finalmente:

$$\frac{\alpha^{r+1} - 1}{r+1} > \frac{\alpha^r - 1}{r},$$

e cioè che la successione $a_r = \frac{\alpha^r - 1}{r}$ è una successione *crescente*. Quindi $a_r > a_1$, e cioè, come si verifica immediatamente:

$$\alpha^r > 1 + r(\alpha - 1).$$

Ponendo $\alpha = 1 + x$, $x > 0$, tale disuguaglianza può essere dunque scritta come $(1 + x)^r > 1 + rx$.

Viceversa, sia $0 < \beta < 1$ e r come sopra. Allora analogamente:

$$r\beta^r < \beta^{r-1} + \beta^{r-2} + \ldots + 1,$$

moltiplicando per $1 - \beta$:

$$r\beta^r(1 - \beta) < 1 - \beta^r,$$

sommando $r(1 - \beta^r)$:

$$r(1 - \beta^{r+1}) < (r + 1)(1 - \beta^r),$$

ed infine dividendo per $r(r + 1)$:

$$\frac{1 - \beta^{r+1}}{r + 1} < \frac{1 - \beta^r}{r},$$

e cioè la successione $b_r = \frac{1-\beta^r}{r}$ è *decrescente*. Quindi $b_r < b_1$ e cioè:

$$\beta^r > 1 + r(\beta - 1).$$

Ponendo $\beta = 1 + x$, $-1 < x < 0$, anche questa disuguaglianza può essere scritta come $(1 + x)^r > 1 + rx$.

Abbiamo cosí dimostrato il seguente lemma.

Lemma 1 (Disuguaglianza di Bernoulli, esponente intero)**.** *Sia $x > -1$ ed r un intero positivo. Allora:*

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx, \tag{3}$$

e l'uguaglianza vale solo se $x = 0$ o se $r = 1$.

Osservazione 10. La (3) viene spesso dimostrata per induzione in r, a partire da $r = 2$ nel qual caso è ovvia. In realtà la dimostrazione "diretta" che abbiamo dato è molto elegante, ed i risultati intermedi che abbiamo ottenuto ci risulteranno molto presto utili. Lasciamo la semplice dimostrazione per induzione per esercizio.

In realtà le disuguaglianze di cui sopra valgono anche nel caso in cui r sia un numero razionale positivo. Infatti la disuguaglianza di Bernoulli discende direttamente dal fatto che le successioni a_r e b_r sopra definite sono rispettivamente crescente e decrescente, cioè che se $r > s$ allora:

$$\frac{\alpha^r - 1}{r} > \frac{\alpha^s - 1}{s}, \quad \frac{1 - \beta^r}{r} < \frac{1 - \beta^s}{s}. \tag{4}$$

In realtà le (4) valgono appunto anche nel caso in cui r, s siano razionali positivi. Prendendo ad es. la prima, poniamo $r = a/b$, $s = c/d$; allora $ad > bc$ poiché $r > s$. Ponendo poi $\alpha = \gamma^{bd}$ e dividendo ambo i membri per bd otteniamo immediatamente:

$$\frac{\gamma^{ad} - 1}{ad} > \frac{\gamma^{bc} - 1}{bc},$$

e ci siamo dunque ricondotti al caso di esponenti interi. Analogamente per la seconda delle (4). Ne segue la generalizzazione del lemma precedente al caso di esponenti razionali.

Lemma 2 (Disuguaglianza di Bernoulli, esponente razionale)**.** *Sia $x > -1$ ed r un razionale positivo. Allora:*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx \qquad \text{se } r > 1, \tag{5}$$

$$(1+x)^r \leq 1 + rx \qquad \text{se } 0 < r < 1, \tag{6}$$

e l'uguaglianza vale solo se $x = 0$.

Osservazione 11. In realtà come si può facilmente immaginare tale disuguaglianza vale per qualsiasi *r reale* e positivo. Utilizzando la monotonia di $\frac{\alpha^r - 1}{r}$ e $\frac{1-\beta^r}{r}$ in r, r razionale, e la definizione di numero reale di Dedekind si potrebbe ottenere una di mostrazione, però troppo complicata per noi. Piú avanti avremo degli strumenti utili per poter dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli anche nel caso reale in modo semplice.

Otteniamo ora un'altra serie di utili disuguaglianze, conseguenza diretta della disugaglianza di Bernoulli.

Abbiamo sopra dimostrato che se r, s sono razionali, $r > 1$ e $0 < s < 1$, e α, β sono numeri reali, $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$, allora:

$$\alpha^r - 1 > r(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^r < r(1-\beta). \tag{7}$$

Sostituiamo allora $\alpha = 1/\beta > 1$ e $0 < 1/\alpha < 1$ ed otteniamo facilmente:

$$\alpha^r - 1 < r\alpha^{r-1}(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^r > r\beta^{r-1}(1-\beta). \tag{8}$$

Analogamente, dalle:

$$\alpha^s - 1 < s(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^s > s(1-\beta). \tag{9}$$

otteniamo per mezzo della medesima sostituzione:

$$\alpha^s - 1 > s\alpha^{s-1}(\alpha - 1), \quad 1 - \beta^s < s\beta^{s-1}(1-\beta). \tag{10}$$

Combinando la (7) e la (8) otteniamo:

$$r(\alpha - 1) < \alpha^r - 1 < r\alpha^{r-1}(\alpha - 1), \tag{11}$$

$$r\beta^{r-1}(1-\beta) < 1-\beta^r < r(1-\beta). \tag{12}$$

Analogamente dalle (9) e la (10) otteniamo:

$$s\alpha^{s-1}(\alpha-1) < \alpha^s - 1 < s(\alpha-1), \tag{13}$$

$$s(1-\beta) < 1-\beta^s < s\beta^{s-1}(1-\beta). \tag{14}$$

Possiamo ora utilizzare queste disuguaglianze per calcolare il limite di una potenza per esponenti razionali (per esponenti interi il risultato discende dal caso 10 del teorema 5; per esponenti reali, il risultato vale ugualmente perché, come abbiamo detto nell'osservazione 11, le disuguaglianze che stiamo utilizzando valgono in realtà anche per r, s reali).

Proposizione 1.

$$\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a.$$

Dimostrazione. Ponendo $x = x_0 t$, ci riconduciamo al caso:

$$\lim_{t\to 1} t^a = 1.$$

Ma tale limite discende immediatamente dalla (11) (limite da destra, $a > 1$), dalla (12) (limite da sinistra, $a > 1$), dalla (13) (limite da destra, $a < 1$) e dalla (14) (limite da sinistra, $a < 1$), per il teorema del confronto. □

Le precedenti uguaglianze possono essere utilizzate anche per il seguente limite.

Proposizione 2. *Sia $a > 0$. Allora:*

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare che $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, poniamo $y = x - x_0$ e quindi $a^x = a^y a^{x_0}$. Basta quindi dimostrare che $\lim_{y\to 0} a^y = 1$.

Ora, se $a > 1$ la (11) implica il limite desiderato quando y tende a 0 da destra e la (13) quando y tende a 0 da sinistra; se $a < 1$ la (12) implica il limite desiderato quando y tende a 0 da destra e la (14) quando y tende a 0 da sinistra.

Ovviamente dobbiamo tenere conto che, essendo a^y una funzione monotona definita ovunque, in qualsiasi intervallo limitato la funzione è limitata, il che ci permette di ottenere il risultato grazie al caso 9 del teorema 5. □

Osservazione 12. Utilizzando il teorema sul limite delle funzioni composte otteniamo anche:

$$\lim_{x\to x_0} \log_b x = \log_b x_0.$$

2.9. Il teorema “ponte”

Il teorema seguente può essere utilizzato sia per dimostrare l’esistenza di un limite, sia per determinare che una determinata funzione non tende a nessun limite, e costituisce un legame tra il limite di una funzione ed il limite delle successioni che da questa si possono ricavare.

Teorema 10. *Le due seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$
2. *Per ogni successione* $\{c_n\}$ *tale che* $c_n \neq l$ *e* $\lim_{n\to\infty} c_n = x_0$ *vale* $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = l$.

Il teorema può essere adoperato per determinare il limite di $f(x)$, nel caso – raro – che calcolare il limite di $f(c_n)$ *per ogni* successione c_n sia piú facile che calcolare direttamente il limite di $f(x)$. Ma può essere anche utilizzato per determinare che $f(x)$ non ammette limite, ad es. trovando due successioni distinte $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, entrambe tendenti a x_0, tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ tendono a limiti diversi.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (1) implica (2). $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ vuol dire che $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Se c_n tende a x_0, allora $\forall\delta > 0\ \exists M$ tale che $n > M \Rightarrow |c_n - x_0| < \delta$, ed inoltre abbiamo che $c_n \neq x_0$. Allora $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, e in corrispondenza di tale $\delta > 0$ esiste un M – quindi $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$ – tale che $n > M \Rightarrow |f(c_n) - l| < \varepsilon$.

Dimostriamo che (2) implica (1) per assurdo. Assumiamo dunque che la (2) sia vera e la (1) falsa, e ricaviamo una contraddizione.

Se la (1) è falsa, cioè se non è vero che il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ è 0, allora, *negando la definizione di limite*, otteniamo:

$$\exists\,\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall\delta > 0: \quad \exists x \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - l| > \varepsilon.$$

Preso dunque tale ε, scegliamo $\delta = 1/n$, e per ciascun tale valore di δ esisterà allora un valore di $x = x_n$ tale che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - l| > \varepsilon$. Abbiamo cosí costruito una successione $\{x_n\}$ che tende a x_0, perché $|x_n - x_0| < 1/n$, e tale che $f(x_n)$ non tende a l, perché per un certo $\varepsilon > 0$ $|f(x_n) - l| > \varepsilon$. ciò contraddice la (2), che si assumeva vera. □

Osservazione 13. Il teorema continua a rimanere valido anche nel caso di limiti per $x \to \pm\infty$ e nel caso di limiti infiniti.

Esempio 2. Il limite per $x \to +\infty$ (ed ovviamente anche $-\infty$!) di $\sin x$ non esiste. Infatti, sia $a_n = \pi n$ e $b_n = \pi/2 + 2\pi n$. Allora $\sin a_n = 0$ e $\sin b_n = 1$, per cui $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin b_n$.

2.10. Infiniti, infinitesimi e confronti; i simboli di Landau

Introduciamo ora alcuni concetti importanti ed una utilissima notazione, che sarà molto utile per calcolare in pratica i limiti e che permette di scrivere in modo molto semplice ed intuitivo ma rigoroso taluni limiti.

Si dice che una successione a_n è infinitesima o è un infinitesimo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se invece $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ si dice che la successione è infinita o che è un'infinito. Analogamente, *se consideriamo il limite per $x \to x_0$, $+\infty$ o $-\infty$* di una funzione è infinitesima o è un infinitesimo se il limite considerato è 0, mentre è infinita ovvero è un'infinito se il limite considerato è $\pm\infty$.

Osservazione 14. **Importante**: Per una successione a_n possiamo solo considerare il limite per $n \to \infty$, mentre per una funzione possiamo considerare una molteplicità di limiti, per x che tende a diversi valori. **La natura infinitesima o infinita di una funzione dipende dunque dal limite che stiamo considerando**.

Siano date due successioni infinitesime a_n e b_n. Diremo che a_n tende a zero piú velocemente di b_n se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, diremo che a_n tende a zero piú lentamente di b_n se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \pm\infty$. Abbiamo delle buone ragioni per non parlare di successioni che tendono a 0 allo stesso modo in termini eccessivamente semplici (v. *infra*).

Analogamente, siano date due successioni infinite a_n e b_n. Diremo che a_n tende a infinito piú velocemente di b_n se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \pm\infty$, diremo che a_n tende a infinito piú lentamente di b_n se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

Si parla in questo caso di confronto fra infinitesimi o infiniti.

È evidente che il confronto fra infinitesimi o infiniti può essere fatto anche per due funzioni f e g; ovviamente, ricordando quanto sottolineato nell'osservazione 14, il confronto fra funzioni andrà fatto **specificando a cosa tende** x.

Per rendere precise queste considerazioni, introduciamo i simboli di Landau o, O, $\sim$ (rispettivamente ‘o piccolo”, ‘o grande” e ‘asintotico”). Nel seguito assumiamo $b_n > 0$, $g(x) > 0$.

- Se:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$
allora scriviamo:
$$a_n = o(b_n).$$
- Se:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
allora scriviamo:
$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$
(stessa cosa se abbiamo $\pm\infty$ invece di x_0).
- Se:
$$\exists K > 0 \text{ tale che } |a_n| < Kb_n,$$
allora scriviamo:
$$a_n = O(b_n).$$

- Se:
$$\exists K > 0 \text{ tale che } |f(x)| < Kg(x) \text{ quando } 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \delta > 0,$$
allora scriviamo:
$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$
(analogamente per $x \to \pm\infty$; ricordarsi la definizione di limite per $x \to \pm\infty$ per avere la condizione su x in questo caso).
- Se:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$
allora scriviamo:
$$a_n \sim b_n.$$
- Se:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$
allora scriviamo:
$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$
(stessa cosa se abbiamo $\pm\infty$ invece di x_0).

In particolare, scrivere $a_n = O(1)$ vuol dire scrivere che la successione a_n è limitata, scrivere $a_n = o(1)$ vuol dire scrivere che la successione a_n è infinitesima. Scrivere $f(x) = O(1)$ per $x \to x_0$ vuol dire che per $0 < |x - x_0| < \delta$, per qualche $\delta > 0$, $f(x)$ è limitata, ovvero che la $f(x)$ è limitata "vicino" a x_0, e scrivere $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ vuol dire che $f(x)$ tende a 0 per x che tende a x_0.

Osservazione 15. **Importante**: $o(\ldots)$, $O(\ldots)$ non sono funzioni. Non esiste nulla che è *davvero* uguale a $o(\ldots)$ o a $O(\ldots)$, qualsiasi cosa ci sia dentro i simboli o, O. Le uguaglianze che abbiamo introdotto **sono solo delle notazioni simboliche** che esprimono la relazione fra due successioni o due funzioni in un passaggio a limite.

Detto in altri termini: stabilito un passaggio a limite (per $n \to \infty$, per $x \to x_0$), scrivere $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ significa dire che a_n, $f(x)$ appartengono ad un certo insieme di successioni o funzioni (nei casi indicati sopra, le successioni che divise per $b(n)$ danno luogo ad una successione limitata, le successioni che tendono a 0 più rapidamente di b_n, le funzioni che divise per $g(x)$ sono limitate, le funzioni che tendono a 0 più rapidamente di $g(x)$. Scrivere ad es. $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, cosa che dimostreremo più avanti, vuol dire che $\sin x$ è uguale a x piú qualcosa che tende a zero piú rapidamente di x per $x \to 0$, *senza aver specificato esattamente cosa*.

Osservazione 16. Ciononostante i simboli o, O possono essere (quasi) tranquillamente utilizzati come se fossero *davvero* delle funzioni. Ad es., sia $x \to x_0$; se $f(x) = o(x)$ allora $f(x)/x \to 0$; ma allora come si verifica immediatamente $x f(x) = o(x^2)$, $f(x)/x = o(1)$, e cosí via. In altri termini, abbiamo posto $x\,o(x) = o(x^2)$, $o(x)/x = o(1)$, etc.

Osservazione 17. L'espressione $o(a_n)$ va interpretata come "qualcosa che tende a zero piú rapidamente di a_n". Non una cosa in particolare, ma *qualsiasi cosa* (analogamente per le funzioni). Quindi ad es.:

- $x + o(1) = o(1)$, $x \to 0$, perché l'unica cosa che possiamo dire di x piú qualcosa che tende a 0, magari anche molto lentamente ($o(1)$) è che tende a 0, magari anche molto lentamente.
- $o(x) + o(x^2) = o(x)$, $x \to 0$, perché se una cosa è la somma di qualcosa che tende a 0 piú rapidamente di x piú qualcosa che tende a 0 piú rapidamente di x^2, tutto quello che possiamo dire è che tende a 0 piú rapidamente di x.

Osservazione 18. Occorre fare molta attenzione se si vuole introdurre il concetto di "ordine di infinito"/"ordine di infinitesimo", come se fosse qualcosa di numerico che può essere misurato e quantificato. La natura infinita o infinitesima di una successione, o di una funzione in un certo limite, può solo essere confrontata con un'altra, ma non quantificata in termini assoluti. Qualsiasi tentativo al riguardo può portare ad antinomie e a conclusioni errate se applicato come se fosse una metafora, senza fare attenzione alla sostanza delle cose. Noi eviteremo pertanto di dare un significato ad espressioni come "l'ordine di infinitesimo di $1/n^2$ è 2" e simili, che preferiremo quindi evitare.

Nel seguito faremo largo utilizzo dei simboli di Landau, e diventeranno il principale strumento per calcolare i limiti riconducendoli ai limiti notevoli che dimostreremo fra poco.

3. Limiti notevoli

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per calcolare i principali limiti notevoli (non del tutto banali).

3.1. Potenze, esponenziali e fattoriali

Consideriamo alcuni limiti elementari concernenti potenze, esponenziali e fattoriali.

Proposizione 3. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $a > 1$ abbiamo:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

Dimostrazione. Se $\alpha \leq 0$ il limite è ovvio. Consideriamo allora $\alpha > 0$ ed utilizziamo il teorema ponte. Basta dimostrare che per ogni successione $b_n \to +\infty$: $b_n^\alpha / a^{b_n} \to 0$.

Innanzitutto abbiamo $\sqrt{n}/a^n \to 0$ (caso $b_n = n$, $\alpha = 1/2$). Infatti, facendo uso della disuguaglianza di Bernoulli e ponendo $a = 1 + h$ abbiamo:

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} = \frac{1}{h\sqrt{n}} \to 0. \tag{15}$$

Eliminiamo ora la restrizione al caso $\alpha = 1/2$ osservando che:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(a^{1/2\alpha})^n}\right)^{2\alpha} \to 0,$$

utilizzando la (15) ed il fatto che $a^{1/2\alpha} > 1$.

Inoltre, per il teorema 6, data qualsiasi successione *a valori interi* $c_n \to +\infty$ allora $\dfrac{c_n^\alpha}{a^{c_n}}$ tende pure a 0, in quando $\{c_n\}$ è una sottosuccessione della successione $\{n\}$.

Infine, consideriamo una successione b_n qualsiasi che tende a $+\infty$ ed utilizziamo il fatto che $\lfloor b_n \rfloor \leq b_n \leq \lfloor b_n \rfloor + 1$:

$$0 < \frac{b_n^\alpha}{a^{b_n}} < \frac{(\lfloor b_n \rfloor + 1)^\alpha}{a^{\lfloor b_n \rfloor}} = \frac{(\lfloor b_n \rfloor + 1)^\alpha}{a^{\lfloor b_n \rfloor + 1}}\, a \to 0 \cdot a = 0.$$

□

I seguenti limiti seguono immediatamente dalla preposizione 3:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} a^x |x|^\alpha = 0, && \text{se } \alpha \in \mathbb{R},\ a > 1,\\
&\lim_{x\to+\infty} a^x x^\alpha = 0, && \text{se } \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1,\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0, && \text{se } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\\
&\lim_{x\to0+} x^\beta |\log_b x|^\alpha = 0, && \text{se } \alpha \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1,\ \beta > 0.
\end{aligned}$$

Il primo si riconduce alla proposizione 3 ponendo $x = -y$. Il secondo vi si riconduce ponendo $a = 1/b$. Il terzo ponendo $\log_b x = y$ se $b > 1$ e $\log_b x = -y$ se $0 < b < 1$. Il quarto si riconduce al terzo ponendo $x < 1/y$. Lasciamo i dettagli delle sostituzioni per esercizio.

Si osservi che, se $x \to +\infty$, allora un esponenziale con base maggiore di 1 tende a infinito *piú rapidamente di qualsiasi potenza positiva di* x, mentre un esponenziale con base positiva minore di 1 tende a 0 *piú rapidamente di qualsiasi potenza negativa di* x. Analogamente, Se $x \to 0^+$, allora un logaritmo di base maggiore di 1 tende a infinito *piú lentamente di qualsiasi potenza positiva di* x.

Confrontiamo ora esponenziali e fattoriali.

Proposizione 4. *Sia* $a > 0$*; allora abbiamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

e:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Dimostrazione. Il primo è ovvio se $0 < a \leq 1$, quindi assumiamo $a > 1$. In tal caso abbiamo:

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} = \underbrace{\frac{a}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{\lceil a \rceil - 1}}_{\lceil a \rceil - 1 \text{ fattori} \leq a} \cdot \underbrace{\frac{a}{\lceil a \rceil} \cdot \ldots \cdot}_{\text{fattori} \leq 1} \frac{a}{n} < a^{\lceil a \rceil - 1} \cdot \frac{a}{n} \to 0.$$

Per quanto riguarda il secondo, abbiamo:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} < 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

□

Quindi, *il fattoriale tende a* $+\infty$ *piú rapidamente di qualsiasi esponenziale con base arbitrariamente grande*, ma *piú lentamente di* n^n.

3.2. Limiti trigonometrici

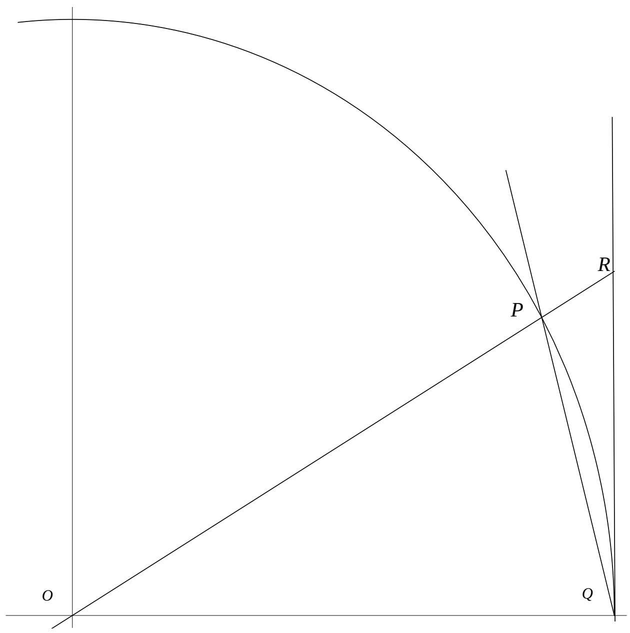


Figura 1: Limiti trigonometrici

Dimostriamo i limiti fondamentali delle funzioni trigonometriche.

Teorema 11. *Abbiamo:*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \tag{17}$$

$$\lim_{x\to 0} \tan x = 0. \tag{18}$$

Dimostrazione. La (17) segue immediatamente dalla (16) dal momento che $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ e che se $-\pi/2 < x < \pi/2$ allora $\cos x > 0$, e la (18) è ovvia date le (16) e (17).

Per dimostrare la (16), si faccia riferimento alla figura 1. L'area del triangolo OPQ è minore dell'area del settore circolare OPQ; quindi se $x > 0$:

$$0 < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2},$$

e quindi per il teorema del confronto $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$. Essendo la funzione $\sin x$ dispari, il medesimo limite vale anche per $x \to 0^-$. □

Utilizzando i simboli di Landau possiamo scrivere le (16), (17) e (18) come $\sin x = o(1)$, $\cos x = 1 + o(1)$ e $\tan x = o(1)$, per $x \to 0$.

Teorema 12. *Abbiamo:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{19}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1. \tag{21}$$

Dimostrazione. La (20) segue immediatamente dalle (19), (17):

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{2},$$

e la (21) è ovvia date le (19), (17).

Per dimostrare la (19), si faccia nuovamente riferimento alla figura 1 e si consideri il limite per $x \to 0^+$. L'area del settore circolare OPQ è compresa tra l'area del triangolo OPQ e quella del triangolo ORQ, e quindi:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

Moltiplicando i tre membri di questa disuguaglianza per $2/\sin x$ (che è positivo per $0 < x < \pi/2$) otteniamo:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ed invertendo:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

se $0 < x < \pi/2$. Per il teorema del confronto allora il limite richiesto è ottenuto per $x \to 0^+$. Tenendo conto che la funzione $\sin x/x$ è pari, il medesimo limite vale anche se $x \to 0^-$, dimostrando quindi la (19). □

Utilizzando i simboli di Landau possiamo scrivere:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1),$$

e quindi:

$$\sin x = x + o(x).$$

Analogamente abbiamo:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e:

$$\tan x = x + o(x).$$

Ovviamente otteniamo mediante sostituzione i limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

e:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

cioè $\arcsin x = x + o(1)$, $\arctan x = x + o(1)$.

3.3. Il numero e

Dimostriamo ora che il seguente limite esiste ed è un numero compreso fra 2 e 3 che chiameremo e (numero di Nepero).

Teorema 13. *Il seguente limite esiste finito:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{22}$$

Vale inoltre $2 < e < 3$*.*

I limiti notevoli che dimostreremo nel paragrafo seguente ne chiariranno l'importanza.

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che la successione $c_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente. Infatti utilizzando la formula del binomio di Newton abbiamo:

$$\begin{aligned} c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \\ = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Da ciò si evince immediatamente che c_n è una sommma di termini positivi, che il numero di tali termini cresce con n (infatti nella sommatoria (23) ci sono esattamente $n + 1$ termini!), e che *ciascun termine di tale sommatoria è una funzione crescente di* n, come è evidente dall'ultimo modo di scrivere c_n nella (23) (somma di prodotti di fattori positivi crescenti in n). Quindi c_n è una successione crescente, e quindi se illimitata tende a $+\infty$, se limitata tende a limite finito per il teorema 8.

Resta da dimostrare dunque che c_n è una successione limitata. Noi dimostreremo che $2 < c_n < 3$ se $n \geq 3$, da cui la tesi.

Se $n \geq 3$, allora è evidente che $c_n > 2$: infatti c_n è crescente e $c_3 = 64/27 > 2$. Utilizzando di nuovo la (23) abbiamo:

$$c_n = 2 + \ldots + \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 3. \quad (24)$$

Gli ultimi due passaggi nella (24) sono giustificati dalle seguenti osservazioni. Innanzitutto, è ovvio che la successione $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ è una successione crescente, quindi se tende a limite finito allora è minore del limite. Infine usando la formula per la somma della successione geometrica abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^{n-1}}{1 - 1/2} \to 1$$

per $n \to \infty$. □

È molto semplice infine ottenere le seguenti generalizzazioni del limite appena dimostrato.

Teorema 14. *Abbiamo:*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (25)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (26)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha. \quad (27)$$

Dimostrazione. La (25) viene dimostrata facendo uso del teorema ponte. Osserviamo innanzitutto che data qualsiasi sottosuccessione $\{b_n\}$ di $\{n\}$, cioè data qualsiasi successione *a valori interi* che tende a $+\infty$, allora per il teorema sul limite delle sottosuccessioni abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

Sia ora a_n una qualsiasi successione che tende a $+\infty$. Se dimostriamo che per ogni tale successione $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/a_n)^{a_n} = e$, allora per il teorema ponte abbiamo dimostrato la (25). Per dimostrare questo, utilizziamo le ovvie disuguaglianze $\lfloor a_n \rfloor \le a_n \le \lceil a_n \rceil$, $\lceil a_n \rceil - 1 \le a_n \le \lfloor a_n \rfloor + 1$:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{\lceil a_n \rceil}\right)^{\lceil a_n \rceil}}{1 + \frac{1}{\lceil a_n \rceil}} = \left(1 + \frac{1}{\lceil a_n \rceil}\right)^{\lceil a_n \rceil - 1} \le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor + 1} = \left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)$$

ma $\{\lfloor a_n \rfloor\}$, $\{\lceil a_n \rceil\}$ sono sottosuccessioni di $\{n\}$, per cui per l'osservazione precedente $\left(1 + \frac{1}{\lceil a_n \rceil}\right)^{\lceil a_n \rceil} \to e$, $\left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \to e$, e $1 + \frac{1}{\lceil a_n \rceil} \to 1$, $1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor} \to 1$, da cui la tesi.

Per quanto riguarda la (26), ponendo $y = -x \to +\infty$, abbiamo:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\to e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_{\to 1} \to e.$$

Infine la (27) segue dalla (25) o dalla (26) a seconda se α/x sia positivo o negativo (ed è ovvia se $\alpha = 0$). Infatti:

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right)^\alpha,$$

e $x/\alpha \to \pm\infty$. □

3.4. Altri limiti notevoli contenenti esponenziali e logaritmi

Dimostriamo ora altri limiti notevoli relativi a esponenziali e logaritmi *in base e*. Tali limiti notevoli, importantissimi, chiariranno l'importanza del numero di Nepero e. Nel seguito scriveremo sempre $\log x$, senza indicare la base, intendendo $\log_e x$, cioè il logaritmo base e (LOGARITMO NATURALE O NEPERIANO). Si tratta di limiti molto semplici da ricavare.

Innanzitutto, dalle (25), (26) e dall'osservazione 12 ricaviamo immediatamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \log\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \log\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = 1.$$

Utilizzando i simboli di Landau possiamo scrivere questo limite come:

$$\log(1+x) = x + o(x), \quad x\to 0. \tag{28}$$

Consideriamo ora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Ponendo $y = e^x - 1 \to 0$ per $x \to 0$ abbiamo:

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} \to 1$$

per $x \to 0$. Utilizzando i simboli di Landau scriviamo questo limite come:

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x\to 0. \tag{29}$$

Infine, dato $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Abbiamo allora:

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x} = \frac{e^{\alpha x+o(x)}-1}{x} = \frac{1+\alpha x+o(x)-1}{x} = \alpha + o(1),$$

e quindi il limite considerato vale α. Possiamo scriverlo utilizzando i simboli di Landau nel modo seguente:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x\to 0. \tag{30}$$

Osservazione 19. Nel caso in cui la base del logaritmo o dell'esponenziale non sia e, ci riconduciamo facilmente ai casi (28) e (29) nel modo seguente:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{x}{\log a} + o(x), \quad x \to 0, \tag{31}$$

e:

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + x \log a + o(x), \quad x \to 0. \tag{32}$$

Possiamo scrivere la medesima cosa come:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

3.5. Limite superiore e limite inferiore

Generalizziamo ora la nozione di limite. Iniziamo dal caso del limite di successione.

Definiamo il limite superiore di una successione nel modo seguente:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} c_k. \tag{33}$$

Se la successione $\{c_n\}$ è *illimitata superiormente*, allora $\forall n \sup_{k\geq n} c_k = +\infty$ e quindi il limite superiore della successione è $+\infty$. Se invece la successione è *limitata superiormente*, allora $\sup_{k\geq n} c_k$ è una successione *decrescente*: infatti al crescere di n determiniamo l'estremo superiore di una porzione sempre piú piccola della successione c_k, e quindi l'estremo superiore non può aumentare. Poiché una successione monotona decrescente o tende a limite finito o tende a $-\infty$, abbiamo che il limite superiore di una successione qualsiasi *esiste sempre, finito o infinito*. Non solo: essendo la successione $\sup_{k\geq n} c_k$ monotona *decrescente*, il suo limite sarà il suo estremo inferiore, per cui possiamo anche dire che:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \inf_n \sup_{k\geq n} c_k,$$

senza utilizzare il concetto di limite.

Analogamente definiamo il limite inferiore:

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} c_k. \tag{34}$$

Se la successione $\{c_n\}$ è *illimitata inferiormente*, allora $\forall n \inf_{k\geq n} c_k = -\infty$ e quindi il limite inferiore della successione è $-\infty$. Se invece la successione è *limitata inferiormente*, allora la successione $\inf_{k\geq n} c_k$ è *crescente*, e quindi il limite inferiore esiste finito o è $+\infty$. Anche il limite inferiore dunque *esiste sempre, finito o infinito*, e per ragioni analoghe a quanto visto per il limite superiore può essere scritto come:

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \sup_n \inf_{k\geq n} c_k.$$

Una notazione alternativa per il limite superiore ed il limite inferiore che viene talvolta utilizzata è la seguente: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n$ e $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n$.

Osservazione 20. Dalla definizione di limite superiore e limite inferiore segue immediatamente che $\liminf_{n\to\infty} c_n \leq \limsup_{n\to\infty} c_n$.

Vale il seguente teorema.

Teorema 15. *Se* $\limsup_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} c_n$, *allora esiste anche* $\lim_{n\to\infty} c_n$ *ed è uguale ai limiti inferiore e superiore. Viceversa, se il limite della successione esiste (finito o infinito), allora i limiti superiore ed inferiore coincidono con esso.*

Dimostrazione. Sia $\liminf_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Allora $\inf_{k\geq n} c_k \to +\infty$ cioè $\forall L > 0\ \exists M$ tale che se $n > M$ allora $\inf_{k\geq n} c_k > L$. Ma allora in particolare $c_n > L$ da cui segue che anche il limite di c_n deve essere $+\infty$.

Sia $\limsup_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Allora $\sup_{k\geq n} c_k \to -\infty$ cioè $\forall L > 0\ \exists M$ tale che se $n > M$ allora $\sup_{k\geq n} c_k < -L$. Ma allora in particolare $c_n < -L$ da cui segue che anche il limite di c_n deve essere $-\infty$.

Infine, sia $\limsup_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} c_n = l$. Allora tenendo conto della monotonia delle successioni $\sup_{k\geq n} c_k$, $\inf_{k\geq n} c_k$, abbiamo:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, M_1 : \quad n > M_1 \Rightarrow l < \sup_{k\geq n} c_k < l + \varepsilon,$$

e quindi in particolare se $n > M_1$ allora $c_n < l + \varepsilon$; e poi:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, M_2 : \quad n > M_2 \Rightarrow l - \varepsilon < \inf_{k\geq n} c_k < l,$$

e quindi in particolare se $n > M_2$ allora $l - \varepsilon < c_n$. Quindi se $n > \max(M_1, M_2)$ allora $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$, il che implica che il limite di c_n esiste ed è l.

L'ultima affermazione può essere dimostrata in modo elementare. Se c_n tende a $+\infty$, cioè se $\forall L > 0\ \exists M$ tale che $n > M \Rightarrow c_n > L$, allora $\inf_{k\geq n} c_k \geq L$ se $n > M$ e quindi il limite inferiore è $+\infty$ e per l'osservazione 20 anche il limite superiore. Se c_n tende a $-\infty$, cioè se $\forall L > 0\ \exists M$ tale che $n > M \Rightarrow c_n < -L$, allora $\sup_{k\geq n} c_k \leq -L$ se $n > M$ e quindi il limite superiore è $-\infty$ e quindi anche il limite inferiore.

Se infine c_n tende a l, allora $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$ tale che $n > M \Rightarrow l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$, e quindi se $n > M$ $l - \varepsilon \leq \inf_{k\geq n} c_k \leq \sup_{k\geq n} c_k \leq l + \varepsilon$, da cui segue che sia il limite inferiore che quello superiore sono pari a l. □

Esempio 3. Se $c_n = \sin n$, allora $\limsup_{n\to\infty} c_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} c_n = -1$.

Per quanto riguarda il limite superiore ed inferiore di *funzioni*, definiamo:

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\eta\to 0} \sup_{\substack{x\in(x_0-\eta, x_0+\eta),\\ x\neq x_0}} f(x),$$

e:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\eta\to 0} \inf_{\substack{x\in(x_0-\eta, x_0+\eta),\\ x\neq x_0}} f(x).$$

Il senso di queste definizioni dovrebbe essere ovvio. Il caso di limite superiore e inferiore per $x \to \pm\infty$ è sostanzialmente analogo a quello delle successioni. In ogni caso, i limiti superiore ed inferiore di funzioni godono delle medesime proprietà di quelli delle successioni, come sarebbe facile dimostrare ricorrendo alle medesime tecniche utilizzate nel caso dei limiti di successioni.

4. Nozioni di topologia

Per poter andare avanti e dimostrare risultati importanti, abbiamo bisogno di qualche altro concetto generale che ci permetterà peraltro di comprendere meglio il concetto di limite. Le nozioni che introduciamo in questo paragrafo fanno parte di quella parte dell'analisi matematica che prende il nome di *topologia*, di cui esponiamo le idee piú elementari.

Noi lavoreremo sempre in $\mathbb{R}$, cioè nella *retta* reale; tutti i concetti qui esposti si generalizzano però senza problemi, *in genere* senza alcuna modifica *sostanziale* alle dimostrazioni, a $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, cioè a spazi di dimensione (finita) qualsiasi. Qualche teorema può avere una dimostrazione piú semplice se si sfrutta esplicitamente l'unidimensionalità, ma noi preferiremo la dimostrazione facilmente generalizzabile al caso multidimensionale.

4.1. Punti esterni, interni, di frontiera e di accumulazione

Nel seguito, ogni volta che menzioneremo il complemento $\complement A$ di un insieme $A \subset \mathbb{R}$, si intende che l'insieme contesto è tutto $\mathbb{R}$.

Dato un punto $a \in \mathbb{R}$, un INTORNO di a è l'intervallo *aperto* $I_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un punto $b \in \mathbb{R}$ si dice INTERNO ad A se esiste un intorno di b contenuto in A, cioè se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset A$. Si dice che b è ESTERNO ad A se è interno al complementare di A, cioè se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset \complement A$. Si dice che b è DI FRONTIERA per A se non è interno né esterno, cioè se $\forall \varepsilon > 0$ $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ contiene sia punti che fanno parte di A che punti che non fanno parte di A.

Le affermazioni contenute nei seguenti esempi sono banali e andrebbero verificate per esercizio.

Esempio 4. Se $A = (a, b)$ è un intervallo aperto, tutti gli x tali che $a < x < b$ (cioè tutti i punti di A) sono interni, tutti gli x tali che $x < a$ o $x > b$ sono esterni, a e b sono di frontiera.

Esempio 5. Se $A = [a, b]$ è un intervallo chiuso, tutti gli x tali che $a < x < b$ sono interni, tutti gli x tali che $x < a$ o $x > b$ (cioè tutti i punti che *non* fanno parte di A) sono esterni, a e b sono di frontiera.

Esempio 6. Sia $A = \{1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Nessun punto è interno; tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 0$ e $x \neq 1/n$ sono esterni, 0 e tutti i punti di A sono punti di frontiera.

Esempio 7. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali come sottoinsieme dei reali. Allora nessun punto è interno né esterno ed ogni numero reale (razionale o meno) è un punto di frontiera. Infatti ogni intervallo (α, β), per quanto piccolo, contiene sia numeri razionali che numeri irrazionali.

L'INTERNO O PARTE INTERNA di un insieme A è l'insieme dei suoi punti interni, e si indica con il simbolo $\mathring{A}$. La FRONTIERA di un insieme A è l'insieme dei suoi punti di frontiera e si indica con il simbolo ∂A.

Esempio 8. Facendo riferimento agli esempi precedenti, l'interno di un intervallo aperto (a, b) coincide con l'intervallo medesimo, l'interno di un intervallo chiuso $[a, b]$ è l'intervallo aperto (a, b), l'interno dell'insieme A dell'esempio 6 e l'interno dell'insieme dei razionali è l'insieme vuoto. La frontiera di un intervallo aperto o chiuso coincide con i suoi estremi, la frontiera dell'insieme A dell'esempio 6 è $A \cup \{0\}$, e la frontiera dell'insieme dei razionali è l'insieme di tutti i reali.

Un punto b si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE per l'insieme A se ogni intorno di b contiene un elemento di A diverso da b, cioè se $\forall\varepsilon\ \exists c$ tale che $c \neq b$, $c \in A$. La condizione che il punto c debba essere diverso da b è, come vedremo, essenziale per dare una definizione interessante ed utile. L'insieme dei punti di accumulazione di A viene detto INSIEME DERIVATO di A e si indica con A'.

Un punto b si dice PUNTO ISOLATO dell'insieme A se $b \in A$ e $\exists\,\varepsilon > 0$ tale $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ non contiene altri punti di A (cioè se $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A = \{b\}$).

Esempio 9. Sempre facendo riferimento agli esempi precedenti, sia nel caso dell'esempio 4 che in quello dell'esempio 5, tutti i punti di un intervallo, aperto o chiuso che sia, cosí come i suoi estremi sono punti di accumulazione, e nessun punto è isolato; nel caso dell'esempio 6 solo 0 è un punto di accumulazione e tutti i punti di A sono isolati, mentre ogni numero reale è un punto di accumulazione dei razionali (e nessun punto è isolato). La verifica di queste affermazioni è banale.

Proposizione 5. *Se b è un punto di accumulazione per l'insieme A, allora ogni intorno di b contiene* infiniti *punti di A.*

Dimostrazione. Se b è un punto di accumulazione, allora $\exists\, x_1$ tale che $x_1 \neq b$, $x_1 \in A$. Sia $\varepsilon_1 = |x_1 - b| > 0$; allora, essendo b un punto di accumulazione per A, in $(b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1)$ esiste un x_2, $x_2 \neq b$, $x_2 \in A$, ed ovviamente $x_2 \neq x_1$ (perché per costruzione x_2 è piú vicino a b di x_1). Sia $\varepsilon_2 = |x_2 - b| > 0$; allora, essendo b un punto di accumulazione per A, in $(b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2)$ esiste un x_3, $x_3 \neq b$, $x_3 \in A$, diverso da x_2 e da x_1, e cosí via. $\square$

Ne segue che se un insieme possiede almeno un punto di accumulazione, allora l'insieme contiene infiniti elementi (solo insiemi infiniti possono avere punti di accumulazione).

Non vi è alcuna relazione tra l'essere punto di accumulazione e l'appartenere all'insieme considerato: un punto di accumulazione può far parte o può non far parte dell'insieme di cui è punto di accumulazione. Tutti i punti interni di un insieme sono punti di accumulazione, com'è ovvio ($\mathring{A} \subset A'$), mentre i punti di frontiera possono essere di accumulazione come possono non esserlo. Tutti i punti esterni ad un insieme invece non possono essere punti di accumulazione. Tutti i punti isolati di un insieme sono punti di frontiera, ed ogni punto di frontiera è o isolato o di accumulazione (infatti se un punto $b \in \partial A$ non è isolato, allora $\forall\varepsilon > 0$ esiste un elemento di A diverso da b contenuto in A, e cioè è di accumulazione).

La definizione di limite di funzione per $x \to x_0$ potrebbe essere a questo punto modificata nel modo seguente:

Sia x_0 *un punto di accumulazione del dominio D della funzione* f; allora diremo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Infatti non è necessario chiedere che la funzione f sia definita *ovunque* nell'intervallo $0 < |x - x_0| < \delta$, ma è necessario che mi possa avvicinare arbitrariamente a x_0 rimanendo nel dominio D di f, e cioè che comunque scelga $\delta > 0$ l'insieme $0 < |x - x_0| < \delta$ contenga punti di A, cioè che l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contenga punti di D diversi da x_0, ovvero che x_0 sia appunto un punto di accumulazione per D. Questa definizione, leggermente generalizzata, permette di dare senso a limiti come:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}} = 1.$$

Infatti la funzione $\frac{\sin(1/x)}{\sin(1/x)}$ è definita per $x \in \mathbb{R}$ ma $x \neq 0$ e $x \neq 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e vale 1 laddove essa è definita. La definizione data precedentemente di limite per $x \to 0$ non sarebbe stata applicabile, perché non esiste alcun intervallo della forma $(0, a)$ o $(b, 0)$, $a > 0$, $b < 0$, in cui la funzione è definita (infatti per ogni a, b tali intervalli contengono punti della forma $1/k\pi$ in cui la funzione non è definita, per qualche k sufficientemente grande). Ma l'origine è chiaramente un punto di accumulazione del campo di definizione per cui è possibile utilizzare la definizione, piú generale, data dianzi.

4.2. Insiemi aperti e chiusi

Un insieme A viene detto aperto se $A = \mathring{A}$, cioè se tutti i punti di A sono interni; in altri termini, A è aperto se $\forall x \in A\ \exists\varepsilon > 0$ tale che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Detto ancora in un altro modo, un insieme è aperto se ogni punto dell'insieme ammette un intorno contenuto nell'insieme medesimo. L'insieme vuoto $\emptyset$ viene considerato aperto per definizione. Un insieme A viene detto chiuso se il suo complementare è aperto.

Esempio 10. $\mathbb{R}$ è chiuso, perché il complementare, l'insieme vuoto, per definizione è aperto. $\mathbb{R}$ è aperto, perché ogni numero reale possiede un intorno (*qualsiasi* intorno!) contenuto in $\mathbb{R}$. Quindi l'insieme vuoto, che è il complementare di $\mathbb{R}$, è chiuso. Abbiamo cosí verificato che tutto $\mathbb{R}$ e l'insieme vuoto sono *contemporaneamente aperti e chiusi*. Si potrebbe dimostrare che sono gli *unici* insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.

Esempio 11. Un intervallo aperto è un insieme aperto. Infatti, sia $A = (a, b)$; allora $x \in A$ vuol dire $a < x < b$, e quindi basta prendere $0 < \varepsilon < \min(x - a, b - x)$ per avere $x - \varepsilon > a$, $x + \varepsilon < b$ per cui $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. Analogamente $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ sono insiemi aperti.

Esempio 12. Un intervallo chiuso è un insieme chiuso. Infatti, sia $A = \complement[a, b]$ il complementare dell'intervallo chiuso $[a, b]$, e dimostriamo che A è aperto. Ora, se $x \in A$, allora $x < a$ o $x > b$. Nel primo caso, sia $0 < \varepsilon < a - x$: allora $x + \varepsilon < a$ per cui $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Nel secondo caso, sia $0 < \varepsilon < x - b$: allora $x - \varepsilon > b$ per cui $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Analogamente anche $(-\infty, b]$ e $[a, +\infty)$ sono chiusi.

Esempio 13. Intervalli del tipo $(a, b]$ e $[a, b)$ sono esempi di insiemi né aperti né chiusi.

Enunciamo il primo dei due principali teoremi sugli insiemi aperti e chiusi. Per farlo dobbiamo introdurre una semplice notazione.

Sia $\mathcal{S}$ un *insieme arbitrario* di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Indichiamo con $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ o semplicemente con $\bigcup A$ l'unione di *tutti* gli insiemi A che fanno parte di $\mathcal{S}$, cioè:

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \quad \text{se} \quad \exists A \in \mathcal{S} \text{ tale che } x \in A.$$

Indichiamo con $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ o semplicemente con $\bigcap A$ l'intersezione di *tutti* gli insiemi A che fanno parte di $\mathcal{S}$, cioè:

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A \quad \text{se} \quad \forall A \in \mathcal{S} : \ x \in A.$$

Si noti che in questo modo abbiamo dato significato all'unione o all'intersezione di un numero *infinito* di insiemi.

Vale allora il seguente teorema.

Teorema 16. *Le unioni ed intersezioni di insiemi aperti o chiusi soddisfano le seguenti proprietà:*

1. *L'unione* $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ *di un insieme arbitrario* $\mathcal{S}$ *di insiemi aperti è aperto.*
2. *L'intersezione di un numero* finito *di insiemi aperti* $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ *è aperto.*
3. *L'intersezione* $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ *di un insieme arbitrario* $\mathcal{S}$ *di insiemi chiusi è chiuso.*
4. *L'unione di un numero* finito *di insiemi chiusi* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *è chiuso.*

Dimostrazione. Se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$ vuol dire che esiste un $A_0 \in \mathcal{S}$ tale che $x \in A_0$. Essendo A_0 aperto, $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_0$ e quindi anche $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$, da cui il punto 1 del teorema.

Siano ora $A_1, \ldots, A_n$ insiemi aperti. Se $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ allora $x \in A_k$, $k = 1, \ldots, n$, quindi $\exists\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tali che $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1, \ldots, (x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n) \subset A_n$. Ponendo $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) > 0$ abbiamo dunque che per $k = 1, \ldots, n$ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k) \subset A_k$, e quindi $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, da cui il punto 2 del teorema.

Se teniamo conto che il complementare di un insieme aperto è chiuso e viceversa, che il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari e che il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari il punto 3 segue dal punto 1 ed il punto 4 segue dal punto 2. □

Nel caso dell'intersezione di aperti e dell'unione di chiusi l'ipotesi della finitezza del numero di insiemi è essenziale. Infatti, consideriamo il seguente insieme *infinito* di intervalli aperti:

$$I_k = \left(-1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

L'intersezione di tutti gli intervalli I_k è allora l'intervallo *chiuso* $[-1, 1]$: infatti tutti gli $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq x \leq 1$ sono contenuti in tutti gli I_k, mentre ogni $x > 1$, $x < -1$ non è contenuto in tutti gli I_k con k sufficientemente grande (basta prendere $k > 1/(x-1)$ se $x > 1$ ovvero $k > 1/(-x-1)$ se $x < -1$). Analogamente, consideriamo il seguente insieme *infinito* di intervalli chiusi:

$$J_k = \left[-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right], \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

L'unione di tutti gli intervalli J_k è allora l'intervallo *aperto* $(-1, 1)$: infatti tutti gli $x \geq 1$, $x \leq -1$ non fanno parte di nessun J_k, mentre ogni x tale che $-1 < x < 1$ fa parte di tutti i J_k con k sufficientemente grande (basta prendere $k > 1/(1-x)$ se $0 < x < 1$ ovvero $k > 1/(x+1)$ se $-1 < x < 0$).

Esempio 14. Ogni insieme finito $\{x_1, \ldots, x_N\}$ è chiuso. Infatti il suo complementare è l'unione degli intervalli aperti $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, $(x_N, +\infty)$.

Proposizione 6. *La parte interna $\mathring{A}$ di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di punto interno ad un insieme. □

La chiusura $\bar{A}$ di un insieme A è l'unione di A e della sua frontiera:

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

Il nome è giustificato dalla seguente proposizione.

Proposizione 7. *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Dato un insieme A, ogni punto x è o interno, o esterno o di frontiera; se è interno fa parte di A, se è esterno non fa parte di A. Il complementare della chiusura di A dunque coincide con l'insieme dei punti esterni ad A. Ricordando la definizione di punto esterno, la tesi segue immediatamente. □

Osservazione 21. La parte interna $\mathring{A}$ di un insieme è "il piú grande" insieme aperto contenuto in A. La chiusura $\bar{A}$ di un insieme A è "il piú piccolo" insieme chiuso contenente A.

Un insieme A si dice DENSO IN B se $A \subset B$ e $\overline{A} = B$. Ad es. i razionali sono densi nei reali: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Teorema 17. *Dato $A \subset \mathbb{R}$, le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è chiuso,*
2. *$\partial A \subset A$,*
3. *A contiene i suoi punti di accumulazione ($A' \subset A$).*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Bisogna dimostrare che se A è chiuso e $x \notin A$ allora $x \notin \partial A$. Ma se A è chiuso allora $\complement A$ è aperto per cui se $x \notin A$ allora x è esterno ad A e quindi non è di frontiera.

$2 \Rightarrow 3$. Se x è un punto di accumulazione di A allora x non è esterno ad A, per cui x è o interno ad A (e quindi $\in A$) o di frontiera. Quindi $x \in A \cup \partial A$, ma se $\partial A \subset A$ allora $x \in A$.

$3 \Rightarrow 1$. Se $x \in \complement A$ allora poiché A contiene i suoi punti di accumulazione x non è un punto di accumulazione e quindi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ non contiene alcun punto di A. Quindi $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \complement A$, quindi $\complement A$ è aperto, quindi A è chiuso. □

4.3. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Questo paragrafo è dedicato ad un teorema che dimostra l'esistenza di punti di accumulazione per un insieme sotto opportune condizioni. È un teorema centrale per l'analisi, da cui dipendono molti altri teoremi importanti.

Teorema 18 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Un insieme limitato e infinito possiede almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. La tecnica di dimostrazione utilizzata è altrettanto importante del teorema medesimo, e verrà utilizzata per dimostrare altri importanti teoremi.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, limitato – e cioè $A \subset [a, b]$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ – e infinito – cioè A possiede infiniti elementi. Sia $c = (a + b)/2$, cioè il punto medio dell'intervallo $[a, b]$ che contiene A; allora, se consideriamo i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$, *almeno uno dei due deve contenere infiniti elementi di A*: altrimenti A non sarebbe un insieme infinito; quindi possiamo sempre scegliere tra i due semi-intervalli uno che contenga infiniti elementi di A (se entrambe contengono infiniti elementi di A, ne scegliamo uno arbitrariamente, ad es. scegliamo quello piú a destra). Tale nuovo intervallo lo chiamiamo $[a_1, b_1]$: chiaramente o $a_1 = a$, $b_1 = c$ o $a_1 = c$, $b_1 = b$, a seconda se abbiamo preso quello di destra o quello di sinistra. Ma se anche $[a_1, b_1]$ contiene infiniti elementi di A, possiamo ripetere la costruzione appena fatta dividendo tale intervallo a metà e scegliendo una delle due metà che contiene infiniti elementi di A, ottenendo un intervallo $[a_2, b_2]$ che contiene anch'esso infiniti elementi di A e così via.

In definitiva, abbiamo ottenuto una successione $\{[a_k, b_k]\}$ di intervalli, tutti contenuti l'uno dentro l'altro, e che contengono tutti infiniti elementi di A. Osserviamo che:

1. la successione $\{a_k\}$ è crescente: $a_{k+1} \geq a_k$;
2. la successione $\{b_k\}$ è decrescente: $b_{k+1} \leq b_k$;
3. la successione $\{a_k\}$ è limitata dall'alto: $a_k < b$;
4. la successione $\{b_k\}$ è limitata dal basso: $b_k > a$.

Ne segue che per il teorema 8 $a_k \to \alpha$ e $b_k \to \beta$ per $k \to \infty$. Ma $b_k - a_k = (b-a)/2^k$, per cui $b_k - a_k \to 0$, e quindi $\beta = \alpha$.

Abbiamo dunque definito un punto α. Dimostriamo ora che α è un punto di accumulazione per A.

Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi, anche molto piccolo, e consideriamo l'intervallo $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. Poiché $a_k \nearrow \alpha$ esiste k_1 tale che $\forall k \geq k_1$ $a_k \in (\alpha-\varepsilon, \alpha)$, e poiché $b_k \searrow \beta = \alpha$ esiste k_2 tale che $\forall k \geq k_2$ $b_k \in (\alpha, \alpha+\varepsilon)$. Ponendo $K = \max(k_1, k_2)$, abbiamo allora che l'intervallo $[a_K, b_K]$ è contenuto in $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. Poiché $[a_K, b_K]$ contiene infiniti elementi di A, ne contiene almeno uno diverso da α, che quindi è un punto di accumulazione. □

4.4. Compattezza

In questo paragrafo dimostreremo importanti proprietà degli insiemi chiusi e limitati. Le conseguenze dei teoremi, apparentemente astratti, che dimostreremo adesso sono molto importanti.

Un insieme chiuso e limitato viene detto anche COMPATTO.

Teorema 19. *Sia A un insieme chiuso e limitato. Allora A ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. Noi sappiamo già che un insieme semplicemente limitato ammette estremo superiore ed estremo inferiore. Si tratta ora di dimostrare che se è anche chiuso allora gli estremi superiore ed inferiore sono rispettivamente il massimo ed il minimo.

Sia $\alpha = \inf A$. α non può essere interno ad A, perché allora esisterebbero elementi di A minori di α e quindi α non sarebbe un maggiorante, e non può nemmeno essere esterno ad A, perché innanzitutto essendo un minorante non possono esistere elementi di A minori di α, e se fosse esterno esisterebbero anche numeri *maggiori* di α che non fanno parte di A e quindi α non sarebbe *il massimo* dei minoranti. Quindi è un punto di frontiera, ed essendo l'insieme A chiuso per il teorema 17 $\alpha \in A$, e quindi è il minimo.

Si ragiona in modo simile per l'estremo superiore. Sia $\beta = \sup A$. Per ragioni analoghe, β deve essere punto di frontiera per A, ed essendo A chiuso $\beta \in A$ e quindi è il massimo. □

Il seguente teorema caratterizza gli insiemi compatti in termini delle successioni in essi contenute.

Teorema 20. *Ogni successione a valori in un insieme chiuso e limitato A ammette una sottosuccessione convergente con limite in A. Viceversa, se ogni successione a valori in un insieme A ammette una sottosuccessione convergente con limite in A, allora A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima delle due affermazioni. Sia A chiuso e limitato, e sia $\{a_k\}$ una successione contenuta in A: $a_k \in A$. Ora, si osservi che i valori assunti dalla successione al variare di k non devono essere necessariamente tutti diversi, quindi l'insieme dei valori assunti dalla successione non è necessariamente infinito; ad es. se $A = [-2, 2]$ e $a_k = (-1)^k$, l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{a_k\}$ è formato solo dai numeri -1 e 1 e quindi è un insieme finito.

Assumiamo dunque che $\{a_k\}$ assuma un insieme *finito* di valori in A. Allora *almeno uno di questi valori* $\alpha \in A$ deve essere assunto per una infinità di valori dell'indice k, che posso ordinare in modo crescente:

$$a_{k_n} = \alpha, \quad k_n \nearrow \infty,$$

e quindi abbiamo costruito banalmente una sottosuccessione convergente che ammette limite in A.

Assumiamo ora invece che $\{a_k\}$ assuma un insieme *infinito* di valori in A. Allora tale insieme ammette almeno un punto di accumulazione α per il teorema di Bolzano-Weierstrass, essendo infinito e limitato (perché contenuto in A, che è limitato per ipotesi). Essendo A chiuso, $\alpha \in A$. Sia ora $\varepsilon_n = 1/n$. Essendo α punto di accumulazione dell'insieme dei valori della successione, $\forall n \; \exists k_n$ tale che $a_{k_n} \in (\alpha - \varepsilon_n, \alpha + \varepsilon_n)$, $a_{k_n} \neq \alpha$. Poiché in ciascuno degli intorni considerati di α per la proposizione 5 posso scegliere k_n grande a piacere, posso scegliere $k_n > k_{n-1}$ e quindi $k_n \nearrow \infty$. Abbiamo cosí costruito una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ che tende a $\alpha \in A$ poiché $|a_{k_n} - \alpha| < \varepsilon_n \to 0$.

Dimostriamo ora la seconda affermazione contenuta nel teorema.

A deve essere limitato. Se A non è limitato superiormente, allora $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists a_k \in A$ tale che $a_k > k$; ma allora $a_k \nearrow +\infty$ e non contiene alcuna sottosuccessione convergente. Analogamente si dimostra che A è limitato inferiormente.

Se A ha un numero finito di elementi allora è chiuso e non abbiamo altro da dimostrare. Assumiamo pertanto che A ha un numero finito di elementi. Allora per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette punti di accumulazione. Sia α un punto di accumulazione di A, e dimostriamo che $\alpha \in A$. Utilizzando la medesima tecnica di prima, sia $\varepsilon_n = 1/n$; quindi ogni intervallo $(\alpha - \varepsilon_n, \alpha + \varepsilon_n)$ contiene un elemento a_n di A diverso da α. Ma la successione cosí costruita converge ovviamente ad α, insieme a tutte le sue sottosuccessioni, e quindi per ipotesi $\alpha \in A$. Poiché dunque A contiene i suoi punti di accumulazione, per il teorema 17 A è chiuso. □

Osservazione 22. In realtà un insieme viene definito compatto se ogni successione a valori in esso possiede una sottosuccessione convergente. Il teorema precedente dunque dimostra che in $\mathbb{R}$ ogni insieme compatto è chiuso e limitato, e viceversa. In realtà tale teorema vale, come tutti gli altri in questo paragrafo, anche in $\mathbb{R}^n$, cioè in spazi di dimensione $n > 1$. Esistono insiemi chiusi e limitati che non sono compatti (cioè per i quali il teorema precedente è falso) solo in spazi infinito-dimensionali, e quindi largamente al di sopra del nostro livello. Per questo abbiamo scelto di dare la definizione piú semplice di insieme compatto come insieme chiuso e limitato.

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un RICOPRIMENTO di A è insieme arbitrario $\mathcal{F}$ di insiemi aperti tali che:

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U,$$

cioè tale che A sia contenuto nell'unione degli insiemi aperti di $\mathcal{F}$ (si dice anche che A è RICOPERTO dagli insiemi U che fanno parte di $\mathcal{F}$). In altre parole, ogni $x \in A$ è anche elemento di qualche $U \in \mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento di A, e sia $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, cioè un sottoinsieme dell'insieme $\mathcal{F}$ degli aperti U che ricoprono A, tale che *anche il sottoinsieme* $\mathcal{F}_1$ *ricopra* A: gli aperti U contenuti in $\mathcal{F}_1$ sono sufficienti in altri termini a ricoprire A. Allora $\mathcal{F}_1$ viene detto SOTTORICOPRIMENTO del ricoprimento $\mathcal{F}$. Un ricoprimento viene detto FINITO se è formato da un numero finito di insiemi aperti $U_1, \ldots, U_M$.

Vale allora il seguente fondamentale teorema.

Teorema 21 (Heine-Borel)**.** *Un insieme A è chiuso e limitato se e solo se ogni ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che se A è chiuso e limitato allora ogni ricoprimento di A ammette un sottoricoprimento finito.

A è limitato, quindi $A \subset [a, b]$. Assumiamo per assurdo che esista un ricoprimento $\mathcal{F}$ di A che non ammetta alcun sottoricoprimento finito. *Utilizzando la stessa tecnica utilizzata per dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass*, dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due parti uguali $[a, c]$ e $[c, b]$; allora $A \cap [a, c]$ e $A \cap [c, b]$ sono anch'essi chiusi e limitati, ed esistono due sottoinsiemi $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ di $\mathcal{F}$ tali che $\mathcal{F}'$ ricopre $A \cap [a, c]$, $\mathcal{F}''$ ricopre $A \cap [c, b]$ e $\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}'' = \mathcal{F}$ (si tratta di una affermazione banale: basta mettere in $\mathcal{F}'$ tutti gli U di $\mathcal{F}$ che hanno intersezione non vuota con $A \cap [a, c]$ e in $\mathcal{F}''$ tutti gli U di $\mathcal{F}$ che hanno intersezione non vuota con $A \cap [c, b]$). *Almeno uno dei due ricoprimenti* $\mathcal{F}'$ *di* $A \cap [a, c]$ *e* $\mathcal{F}''$ *di* $A \cap [c, b]$ *non deve ammettere un sottoricoprimento finito*: se entrambe ammettessero un sottoricoprimento finito, l'unione dei due sottoricoprimenti finiti sarebbe un sottoricoprimento finito di $\mathcal{F}$ ma noi abbiamo fatto l'assunzione che tale sottoricoprimento finito non esista. Sia dunque $[a_1, b_1]$ uno dei due intervalli $[a, c]$, $[c, b]$, tale che $A_1 = A \cap [a_1, b_1]$ ha un ricoprimento $\mathcal{F}_1$ che non ammette un sottoricoprimento finito ($\mathcal{F}_1$ è $\mathcal{F}'$ o $\mathcal{F}''$ a seconda di quale intervallo abbiamo scelto).

A_1 si trova nelle medesime condizioni di A, per cui possiamo ripetere la medesima costruzione ed ottenere un insieme A_2 ricoperto da $\mathcal{F}_2$ il quale non ammette un sottoricoprimento finito, e cosí via.

Ragionando come nella dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, abbiamo due successioni $a_k \nearrow \alpha$, $b_k \searrow \beta = \alpha$, ed esiste un K grande a piacere tale che $A_K \subset [a_K, b_K]$, che contiene elementi di A[1], è ricoperto da $\mathcal{F}_k$ che non ammette sottoricoprimento finito. Ma ciò e impossibile. Infatti, sia $a \in A_k \subset [a_K, b_K]$, e sia $U \in \mathcal{F}$, $U \ni a$. Essendo U aperto, se K è sufficientemente grande $[a_K, b_K] \subset U$, e quindi *posso mettere in* $\mathcal{F}_k$ *solo* U*, ottenendo un ricoprimento finito* la cui esistenza era stata negata per assurdo. La prima parte del teorema è quindi dimostrata.

Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, dimostriamo prima che l'insieme A è limitato. Possiamo costruire un ricoprimento di A considerando l'insieme $\mathcal{F}$ degli intervalli della forma $(x - 1, x + 1)$, $\forall x \in A$: è evidente che si tratta di un ricoprimento. Se esiste un sottoricoprimento finito, formato da M intervalli, allora

[1] A_k non può essere vuoto. Infatti se lo fosse allora potrei prendere $\mathcal{F}_k$ vuoto e ricoprire il nulla col nulla, ottenendo un ricoprimento *finito*, perché costituito da 0 elementi.

l'insieme A è contenuto nella loro unione, e quindi è contenuto al massimo in un intervallo lungo M, e quindi è limitato.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, dobbiamo dimostrare che A è chiuso. Se A è vuoto, è chiuso. Se A è un insieme finito, è pure chiuso. Resta quindi solo da considerare il caso in cui A sia un insieme infinito. Dimostreremo in questo caso per assurdo che l'insieme A contiene i suoi punti di accumulazione e quindi è chiuso per il teorema 17.

Se A è infinito, essendo limitato per quanto osservato sopra deve possedere almeno un punto di accumulazione x_0, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, ed ammettiamo per assurdo che $x_0 \notin A$. Costriuamo un ricoprimento $\mathcal{F}$ nel modo seguente: per ogni $x \in A$, sia $0 < \varepsilon(x) < |x - x_0|$, cioè un numero positivo minore della distanza tra x ed il punto di accumulazione x_0 (x_0 non fa parte di A quindi la distanza tra un punto qualsiasi di A e x_0 è sempre maggiore di 0), e ricopriamo A con $\mathcal{F} = \{(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x))\}$. $\mathcal{F}$ è ovviamente un ricoprimento di A, in quanto ogni punto x di A è contenuto in almeno uno degli intervalli che costituiscono $\mathcal{F}$ (ad es. $(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x))$); si osservi che *nessuno di tali intervalli contiene il punto di accumulazione* x_0. Ma per ipotesi ammettiamo che esista un sottoricoprimento finito di $\mathcal{F}$: sia tale sottoricoprimento finito formato dagli intervalli $I_k = (x_k - \varepsilon(x_k), x_k + \varepsilon(x_k))$, $k = 1, \ldots, M$. Ora, nessuno di tali intervalli contiene x_0, e quindi nemmeno la loro unione $B = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$. Ma la distanza di x_0 da ciascun intervallo I_k è maggiore di 0 e quindi anche la distanza da B da x_0 è maggiore di 0, e quindi x_0 è esterno a B. Ma siccome B contiene A (è l'unione di intervalli che formano un ricoprimento di A), x_0 è anche esterno a A, il che contraddice l'ipotesi che x_0 sia un punto di accumulazione. □

4.5. Successioni fondamentali

Ci resta da dimostrare un importante teorema che ci permette di affermare l'esistenza del limite per tutte le successioni che soddisfano una semplice condizione. Tale teorema dipende dal teorema di Bolzano-Weierstrass, e quindi viene dimostrato solo adesso.

Una successione $\{a_n\}$ viene detta successione fondamentale ovvero successione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tale che $n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$. In altri termini, in una successione fondamentale la differenza tra due valori della successione è piccola a piacere, purché prenda gli indici sufficientemente grandi: per valori grandi dell'indice una successione fondamentale "varia poco", sempre di meno man mano che gli indici diventano sempre piú grandi.

Proposizione 8. *Una successione fondamentale è limitata.*

Dimostrazione. Prendiamo nella definizione di successione fondamentale $\varepsilon = 1$. Dunque $\exists N$ tale che se $n, m > N$ allora $|a_n - a_m| < 1$. In particolare, posso prendere $m = N + 1$ ed ottenere:

$$\forall n > N : \quad a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1,$$

cioè se $n > N$ allora la successione è compresa fra $a_{N+1} - 1$ e $a_{N+1} + 1$. D'altra parte, se $n \leq N$, abbiamo un numero finito di elementi della successione, ed un insieme finito di numeri ammette sempre massimo e minimo: sia pertanto a_{n_1} il piú piccolo e a_{n_2} il piú grande degli $a_1, \dots, a_N$. Allora chiaramente:

$$\forall n: \quad \min(a_{n_1}, a_{N+1} - 1) \leq a_n \leq \max(a_{n_2}, a_{N+1} + 1).$$

□

Teorema 22. *Una successione ammette limite finito se e solo se è fondamentale.*

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \quad n > N \Rightarrow |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi se sia n che m sono maggiori di N abbiamo:

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e la prima metà del teorema è dimostrata.

Viceversa, sia $\{a_n\}$ una successione fondamentale. Per la proposizione 8, $\{a_n\}$ è limitata e per il teorema 20 ammette una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l,$$

cioè:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K: \quad k > K_1 \to |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma $n_k \to \infty$ e quindi:

$$\forall M > 0\ \exists K_2 > 0: \quad n_k > M,$$

ed essendo $\{a_n\}$ una successione fondamentale abbiamo pure:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M: \quad n, m > M \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ se $n > M$ e $k > \max(K_1, K_2)$:

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ed il teorema è dunque dimostrato. □

5. Funzioni continue: definizioni e proprietà elementari

Una funzione continua è intuitivamente una funzione "che non fa salti". Questo concetto intuitivo è tuttavia molto lontano da una formulazione matematica esatta, in grado di portare a risultati utili. Definiamo ora in modo matematicamente corretto il concetto di continuità di una funzione di una variabile reale, e studiamo le proprietà elementari delle funzioni continue di una variabile reale.

5.1. Definizioni ed esempi

Una funzione $f(x)$ è CONTINUA in un punto x_0 appartenente al proprio dominio dom(f) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. In altri termini, la funzione $f(x)$ è continua in x_0 se:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Per poter parlare di continuità della funzione f nel punto x_0, pertanto, non solo il punto x_0 deve far parte del dominio della funzione (altrimenti non possiamo scrivere $f(x_0)$), ma deve avere senso parlare di limite per $x \to x_0$: pertanto per poter dare un senso alla (35) dobbiamo assumere che x_0 sia un *punto di accumulazione* del dominio della funzione: ad es. (ma non solo) un punto interno al dominio, o, se il dominio è un intervallo, uno degli estremi dell'intervallo. La definizione data dunque non si applica se il punto x_0 è un punto che fa parte del dominio della funzione, ma non è un punto di accumulazione, e cioè se x_0 è un *punto isolato* del dominio; tipicamente una funzione viene definita continua "per default" in un punto isolato, ma la continuità delle funzioni definite in un solo punto non è un argomento che ci appassiona.

Noi siamo passati dal definire la continuità di una funzione in un punto utilizzando il limite alla (35) utilizzando la *definizione* di limite in modo diretto, "in termini di ε e δ". Si osservi che non abbiamo scritto $0 < |x - x_0| < \delta$, ma solo $|x - x_0| < \delta$: infatti essendo la funzione definita in x_0 non abbiamo bisogno di escludere tale punto, ed essendo il valore del limite esattamente uguale al valore della funzione in x_0 il secondo membro dell'implicazione contenuta nella (35) è automaticamente soddisfatto quando $x = x_0$.

Una funzione è continua in un insieme $I \subset \mathrm{dom}(f)$ se è continua in ogni punto dell'insieme I.

Se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ si dice che la funzione f è CONTINUA DA DESTRA in x_0. Analogamente se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ si dice che la funzione f è CONTINUA DA SINISTRA.

Esempio 15. Tutti i teoremi che abbiamo dimostrato precedentemente sui limiti ci forniscono una ampia dotazione di funzioni continue. In particolare:

- Una funzione costante $f(x) = c$ è continua.
- La funzione identità $f(x) = x$ è continua.
- La somma di due funzioni continue è una funzione continua.
- Il prodotto di due funzioni continue è una funzione continua.
- Il quoziente di due funzioni continue è una funzione continua.
- La funzione $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è continua per ogni x in cui è definita (cioè per ogni x se $\alpha \geq 0$, e per ogni $x \neq 0$ se $\alpha < 0$).
- Le funzioni $f(x) = a^x$ ($a > 0$), $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) sono continue nel loro dominio.
- Un polinomio è una funzione continua.

- Una funzione razionale è una funzione continua dove è definita (cioè dove il denominatore non si annulla).

È utile rintracciare i teoremi e le osservazioni sui limiti che permettono di verificare tali asserzioni.

Esempio 16. È immediato verificare che se f, g sono funzioni continue in $A \subset \mathbb{R}$ allora $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ sono pure funzioni continue in A. Da questo segue che se f è una funzione continua, anche $|f| = \max(f, -f)$ è una funzione continua (e quindi anche la parte positiva $f_+ = (f + |f|)/2$ e la parte negativa $f_- = (|f| - f)/2$).

Esempio 17. Sia $h(x) = f(g(x))$, dove il dominio di f contiene il codominio di g, sia g continua in x_0 e f continua in $g(x_0)$. Allora $h(x)$ è continua in x_0: ciò segue immediatamente dal teorema sul limite delle funzioni composte. Si osservi che la condizione aggiuntiva, per la quale in un intorno di x_0 la funzione g deve assumere il valore $g(x_0)$ solo in x_0, non è necessaria per la medesima ragione per la quale nella definizione di continuità (35) scriviamo solo $|x - x_0| < \delta$ e non $0 < |x - x_0| < \delta$.

Esempio 18. La funzione $f(x) = \sin x$ è continua in ogni x. Infatti:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \leq 2 \sin \frac{x - x_0}{2},$$

il cui limite per $x \to x_0$ è 0. La continuità della funzione $\cos x$, che potrebbe comunque essere dimostrata in modo analogo, segue dalle formule della trigonometria elementare, cosí come la continuità della funzione $\tan x$ ove definita.

Esempio 19. Consideriamo la *funzione gradino*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora $f(x)$ è continua per ogni $x \neq 0$, e discontinua in $x = 0$.

Esempio 20. In questo esempio abbiamo un esempio di una funzione definita ovunque ed ovunque discontinua. Sia $\mu(x)$ la *funzione di Dirichlet*:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora $\mu(x)$ è discontinua $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti in ogni intervallo $(x - \delta, x + \delta)$, sia se x è razionale sia se x è irrazionale, esistono sempre sia numeri razionali che numeri razionali, per quanto sia piccolo $\delta > 0$, e quindi in ogni tale intervallo esistono punti in cui la funzione vale 0 e punti in cui la funzione vale 1, che quindi non può essere continua.

Esempio 21. Quest'esempio è ancora piú "esotico" ed è piuttosto lontano dal concetto intuitivo di funzione continua perché "non fa salti". Scriviamo ogni numero razionale x come frazione p/q, ridotta ai minimi termini ($\gcd(p,q) = 1$): come è noto, ciò può essere fatto in modo unico, a meno del segno. Definiamo quindi:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q^2} & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora $f(x)$ è *continua sugli irrazionali e discontinua sui razionali*. Infatti, se x_0 è razionale, f ha un valore $1/q^2 > 0$, ma in ogni intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esistono degli irrazionali (infiniti irrazionali), in cui la funzione vale 0: pertanto, per quanto piccolo prenda δ, la differenza fra $f(x_0) = 1/q^2$ e alcuni dei punti in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (gli irrazionali in cui f vale 0) resta pari a $1/q^2$ e quindi non può essere resa piccola a piacere; quindi f è discontinua sui razionali. Viceversa, se x_0 è irrazionale, consideriamo di nuovo l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; allora $f(x_0) = 0$, e man mano che prendiamo δ sempre piú piccolo i razionali contenuti in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ approssimano sempre meglio l'irrazionale x_0, e quindi hanno dei denominatori q sempre piú grandi: pertanto nei razionali dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la funzione f ha un valore pari a $1/q^2 > 0$ ma $q \to \infty$ quando $\delta \to 0$ pertanto $f(x) \to 0 = f(x_0)$ quando $x \to x_0$, da cui la sua continuità.

Un altro teorema sui limiti che si generalizza immediatamente alle funzioni continue è il seguente.

Teorema 23 (Permanenza del segno)**.** *Sia $f(x)$ definita in un intervallo I, sia $x_0 \in I$ e sia f continua in x_0, $f(x_0) > 0$. Allora esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) > 0$.*

Ovviamente vale un risultato analogo se $f(x_0) < 0$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema della permanenza del segno per il limite e dalla definizione di funzione continua. □

È utile anche classificare la natura dei punti in cui una funzione *non* è continua. Se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, cioè i limiti per $x \to x_0$ da destra e da sinistra esistono e sono uguali ma differiscono dal valore della funzione in x_0, si dice che x_0 è una discontinuità rimuovibile: in fatti in tal caso *cambiando la definizione della funzione in un punto* – definendo cioè $f(x_0)$ pari al limite richiesto – la funzione può essere trasformata in una funzione continua in x_0. Se invece $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, cioè i limiti da destra e da sinistra in x_0 *esistono ma sono diversi*, si dice che x_0 è una discontinuità di prima specie o di salto, per ovvie ragioni. In tutti gli altri casi (ad es. anche uno solo dei due limiti da destra o da sinistra non esiste o è infinito) si parla di discontinuità di seconda specie.

Esempio 22. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Il limite per $x \to 0$ di $f(x)$ è 1, ma la funzione nell'origine vale 0, per cui $x = 0$ è una discontinuità rimuovibile: cambiando la definizione di f in 0 – definendola pari a 1 – otterremmo una funzione continua.

Esempio 23. La funzione gradino definita nell'esempio 19 ha una discontinuità di prima specie o di salto nell'origine. Infatti il limite per $x \to 0$ da destra è 1 mentre il limite per $x \to 0$ da sinistra è 0.

Esempio 24. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora il limite per $x \to 0$ da destra è $+\infty$ mentre il limite per $x \to 0$ da sinistra è $-\infty$, per cui si tratta di una discontinuità di seconda specie.

Esempio 25. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora il limite per $x \to 0$ da destra è $+\infty$ mentre il limite per $x \to 0$ da sinistra è 0, per cui si tratta ancora di una discontinuità di seconda specie.

Esempio 26. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora i limiti per $x \to 0$ da destra e da sinistra non esistono, per cui si tratta di nuovo di una discontinuità di seconda specie.

Osservazione 23. Facendo riferimento all'esempio precedente, se avessimo definito semplicemente $f(x) = \sin(1/x)$, allora l'origine non sarebbe stata un punto di discontinuità di seconda specie, perché in questo caso *la funzione non è definita in* 0. In altri termini, per poter parlare di continuità *o discontinuità* di una funzione in x_0, la funzione *deve essere definita in* x_0. **Importante:** alla domanda "$f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione continua?" si deve rispondere "si", perché nel punto $x = 0$ dove si potrebbe pensare che la funzione sia discontinua la funzione in realtà non è definita, e quindi non si può parlare di continuità o meno.

5.2. Teorema dell'esistenza degli zeri

Il teorema dell'esistenza degli zeri enuncia una delle proprietà piú importanti delle funzioni continue, e giustifica il nome che viene loro dato.

Teorema 24. *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e sia f discorde agli estremi dell'intervallo (cioè $f(a)f(b) < 0$). Allora esiste $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$.*

In parole povere, se una funzione continua "parte da *a*" e "arriva fino a *b*", in *a* ha un certo segno ed in *b* ha il segno opposto, "da qualche parte in mezzo" è passata per lo 0, "senza saltare", appunto.

Dimostrazione. Daremo ben due dimostrazioni di questo risultato, perché entrambe sono interessanti di per sé. In entrambe le dimostrazioni assumiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$: l'altro caso è sostanzialmente identico.

Prima dimostrazione. Sia $A = \{x \in [a, b] : \; f(x) < 0\} =\subset [a, b]$. L'insieme A non è vuoto, perché contiene almeno a. L'insieme A è limitato superiormente, perché tutti gli x in A sono minoridi b. Poiché A è non vuoto e limitato superiormente, possiede un estremo superiore α. $f(\alpha)$ non può essere positivo: infatti se lo fosse per il teorema della permanenza del segno esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ allora $f(x) > 0$, e quindi l'estremo superiore di A sarebbe *inferiore* a α. $f(\alpha)$ non può essere negativo: infatti se lo fosse per il teorema della permanenza del segno esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ allora $f(x) < 0$, e quindi l'estremo superiore di A sarebbe *superiore* a α. Quindi $f(\alpha)$ deve essere 0.

Seconda dimostrazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due parti uguali $[a, c]$ e $[c, b]$, $c = (a + b)/2$. I casi sono tre: $f(c) = 0$, $f(c) > 0$ o $f(c) < 0$. Nel primo caso abbiamo trovato lo zero richiesto ed il teorema è dimostrato. Nel secondo caso poniamo $a_1 = a$, $b_1 = c$. Nel terzo caso poniamo $a_1 = c$, $b_1 = b$. Ci ritroviamo comunque con un intervallo lungo la metà tale che $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Possiamo quindi *ripetere la costruzione* prendendo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ ed ottenendo o $f(c_1) = 0$, in qual caso la dimostrazione del teorema è terminata, o un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$ tale che $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ e lungo la metà del precedente, e cioè un quarto di quello di partenza. *La costruzione può essere iterata* finché non arriviamo ad un k tale che $f(c_k) = 0$, in qual caso la dimostrazione del teorema è terminata, o in caso non termini mai può essere iterata all'infinito. In questo secondo caso, abbiamo ottenuto due successioni $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, tali che (i) $a_k \nearrow$ (ii) $b_k \searrow$ (iii) $a_k < b$ (iv) $b_k > a$ (v) $b_k - a_k = (b - a)/2^k \to 0$. Ragionando come nella dimostrazione dei teoremi di Bolzano-Weierstrass e di Heine-Borel, esiste allora un $\alpha \in [a, b]$ tale che $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \alpha$. $f(\alpha)$ non può essere positivo: se lo fosse, $\exists\, \delta > 0$ tale che in $(\alpha - \delta, \alpha)$ $f > 0$ per il teorema della permanenza del segno; ma in tale intervallo, poiché $a_k \nearrow \alpha$, esistono sempre degli a_k (basta prendere k sufficientemente grande!) nei quali $f(a_k) < 0$, ottenendo dunque una contraddizione. $f(\alpha)$ non può essere negativo: se lo fosse, $\exists\, \delta > 0$ tale che in $(\alpha, \alpha + \delta)$ $f < 0$ per il teorema della permanenza del segno; ma in tale intervallo, poiché $b_k \searrow \alpha$, esistono sempre dei b_k (basta prendere k sufficientemente grande!) nei quali $f(b_k) > 0$, ottenendo dunque un'altra contraddizione. Dunque $f(\alpha) = 0$, e quindi ovviamente α non può essere né a né b quindi $\alpha \in (a, b)$. □

Si noti che il teorema dell'esistenza degli zeri ci dimostra che nelle ipotesi indicate *esiste almeno uno zero*. In realtà potrebbe esisterne piú di uno, come è ovvio.

Le seguenti sono alcune conseguenze, piú o meno elementari, del teorema dell'esistenza degli zeri.

Corollario 1. *Sia f definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia $f(a) < y$, $f(b) > y$; allora $\exists \alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = y$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema alla funzione $h(x) = f(x) - y$. □

Corollario 2. *Siano f, g funzioni definite e continue nell'intervallo $[a, b]$, e sia $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$; allora $\exists\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = g(\alpha)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema alla funzione $h(x) = f(x) - g(x)$. □

Corollario 3. *Sia f definita e continua in un intervallo I. Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dimostrazione. Si osservi che non è necessario che I sia chiuso e limitato. Se $\inf_I f < y < \sup_I f$, allora esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < y < f(b)$. Se consideriamo l'intervallo $[a, b]$ se $a < b$, ovvero $[b, a]$ se $a > b$, siamo nelle condizioni del corollario 1. □

Corollario 4. *Sia f una funzione continua in un intervallo I. Allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del corollario precedente e del significato della parola "intervallo". □

5.3. Continuità della funzione inversa

La continuità della funzione inversa non è automaticamente vera. È facile infatti trovare dei controesempi, cioè delle funzioni continue in ogni punto del loro dominio la cui inversa non è continua. Un esempio classico è il seguente.

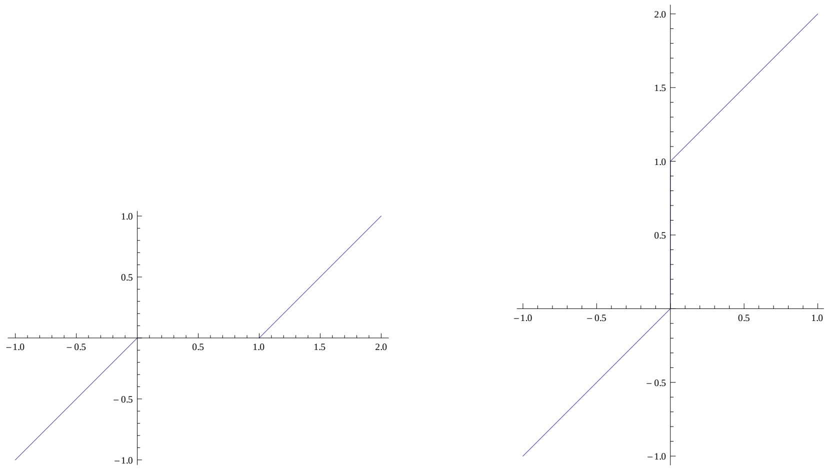
Esempio 27. La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0, \\ x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è definita in $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ ed è continua in ogni punto del suo dominio. La sua funzione inversa è data da:

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{se } y < 0, \\ y + 1 & \text{se } y \geq 0, \end{cases}$$

è definita $\forall y \in \mathbb{R}$ ed ha una discontinuità di prima specie in 0 (v. fig. 2)



(a) $f(x)$ (b) $g(y)$

Figura 2: Discontinuità dell'inversa di una funzione continua.

È chiaro che il risultato apparentemente paradossale è stato ottenuto giocando con il dominio della funzione f, che non è un intervallo. In effetti vale il seguente teorema.

Teorema 25. *Sia $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile nell'intervallo I. Allora la funzione inversa è continua.*

Il teorema discende dalla seguente proposizione.

Proposizione 9. *Sia $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua ed invertibile nell'intervallo I. Allora f è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Siano x_1, x_2, $x_3 \in I$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$. Dobbiamo dimostrare che o $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ o $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$.

Sia $f(x_1) < f(x_3)$, e assumiamo che $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Allora per il corollario 1 esiste un $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = f(x_3)$ il che contraddice l'invertibilità della f. Se assumiamo che $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$, allora per il medesimo corollario deve esistere $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = f(x_3)$ contraddicendo di nuovo l'invertibilità della f, e pertanto deve essere $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$.

Sia $f(x_3) < f(x_1)$, e assumiamo che $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$. Allora esiste $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = f(x_3)$, contraddicendo l'invertibilità di f. Se assumiamo che $f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$, allora esiste $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = f(x_3)$ contraddicendo ancora l'invertibilità di f, e pertanto deve essere $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$. □

Dimostriamo ora il teorema.

Dimostrazione. Se f è continua e invertibile nell'intervallo I, per la proposizione precedente è monotona. Possiamo immaginare che la f sia crescente: in caso contrario la dimostrazione differisce di poco. Anche la f^{-1} è dunque crescente, e quindi esistono i limiti $l_+ = \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$, $l_- = \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y)$, che soddisfano $l_- \leq l_+$. Se $l_- < l_+$ allora $\exists \overline{x}$ tale che $l_- < \overline{x} < l_+$: essendo la f monotona crescente, $\overline{x}$ non può far parte del dominio di f: se infatti facesse parte del dominio di f, avremmo che $f(\overline{x}) > y_0$, perché $\overline{x} > l_-$, e $f(\overline{x}) < y_0$, perché $\overline{x} < l_+$. Ma allora f contrariamente all'ipotesi non è definita in un intervallo. □

6. Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato

Le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato godono di alcune proprietà importanti.

6.1. Teorema di Weierstrass

Il teorema che dimostriamo in questo paragrafo, importantissimo, garantisce l'esistenza degli estremi delle funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato.

Teorema 26. *Sia* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Allora* f *è limitata in* $[a, b]$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue il medesimo schema del teorema di Bolzano-Weierstrass e di Heine-Borel.

Supponiamo che f sia illimitata in $[a, b]$, e ponendo $c = (a + b)/2$, dividiamo tale intervallo nelle due metà $[a, c]$ e $[c, b]$. Se f è illimitata in $[a, b]$, allora dovrà essere illimitata o in $[a, c]$ o in $[c, b]$ (o in entrambe); sia $[a_1, b_1]$ quello dei due intervalli in cui la funzione è illimitata (uno qualsiasi se è illimitata in entrambe). Chiaramente $a_1 \geq a$, $b_1 \leq b$ e $b_1 - a_1 = (b - a)/2$. Possiamo ripetere il medesimo argomento con l'intervallo $[a_1, b_1]$, ottenendo un intervallo $[a_2, b_2]$ tale che $a_2 \geq a_1$, $b_2 \leq b_1$ e $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$, e cosí via. Otteniamo dunque due successioni $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $a_k \nearrow$ e $< b$, $b_k \searrow$ e $> a$, e quindi $a_k \nearrow \alpha$, $b_k \searrow \beta$. Poiché $b_k - a_k = (b - a)/2^k \to 0$ deve essere $\beta = \alpha$.

Ora, osserviamo che essendo f continua in $[a, b]$ e quindi anche in α, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ allora $f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$, e quindi $\exists \delta > 0$ tale che in $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ la f è limitata. Ma poiché $a_k \nearrow \alpha$ e $b_k \searrow \alpha$, $\forall \delta > 0\ \exists K$ tale che $[a_K, b_K] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, ed essendo f illimitata in $[a_K, b_K]$ abbiamo ottenuto una contraddizione. □

Teorema 27 (Weierstrass)**.** *Sia* f *continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Allora* f *ammette in tale intervallo massimo e minimo.*

Dimostrazione. Se f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ per il teorema precedente è limitata, quindi ammette estremo inferiore m ed estremo superiore M.

Se m è l'estremo inferiore della funzione f nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste una successione $\{x_k\}$, $x_k \in [a, b]$, tale che $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = m$. Ma la successione $\{x_k\}$ è limitata perché contenuta nell'intervallo limitato $[a, b]$, e quindi possiede per il teorema di Bolzano-Weierstrass una sottosuccessione convergente $x_{k_n} \to \overline{x}$, $\overline{x} \in [a, b]$. Chiaramente $f(x_{k_n})$ è una sottosuccessione di $f(x_k)$ e quindi tende a m; essendo allora f continua, $f(\overline{x}) = m$, cioè l'estremo inferiore della funzione è effettivamente un valore della funzione assunto in un punto dell'intervallo $[a, b]$ e quindi è un minimo.

La dimostrazione che M è un massimo è sostanzialmente identica. □

Il seguente corollario è ovvio.

Corollario 5. *Nelle ipotesi del teorema precedente,* $f([a, b]) = [m, M]$.

6.2. Continuità uniforme e teorema di Heine-Cantor

Sia f una funzione continua nell'intervallo I. Allora abbiamo che:

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0\ \forall x' \in I : \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{36}$$

Ovviamente δ dipende da ε, come è naturale, *ma dipende anche da* x. Nella (36) abbiamo evidenziato tale dipendenza indicandola esplicitamente scrivendo $\delta_{\varepsilon,x}$. Abbiamo anche sottolineato in precedenza (ad es. nell'osservazione 2) che il valore di $\delta_{\varepsilon,x}$ che abbiamo determinato non è necessariamente ottimale, cioè il migliore (in questo caso il piú grande) valore di δ per cui vale $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Una questione di grande interesse che si pone (molto importante nella dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue, come vedremo piú avanti, ma anche in altri problemi) è quella di stabilire se sia possibile, per una funzione continua in un intervallo I o comunque in un insieme I, anche se non si tratta di un intervallo, determinare $\delta_{\varepsilon,x}$ in modo tale che *non dipenda da* x, cioè determinare un valore di δ che, dipendendo solo da ε, *sia valido per determinare la continuità della funzione* f *in tutti i punti di* I.

Definiamo dunque una funzione f definita in I come UNIFORMEMENTE CONTINUA in I se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon\ \forall x, x' \in I : \quad |x - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{37}$$

Cosa è cambiato rispetto alla (36)? Abbiamo "solo" spostato un quantificatore (il $\forall x \in I$) *dopo* la condizione di esistenza di δ, che pertanto non dipende da x: in altri termini, ora *quanto devono essere vicini* x *e* x' *affinché* $f(x)$ *e* $f(x')$ *siano vicini quanto richiesto (cioè meno di* ε*) non dipende da* x *e* x'.

Osservazione 24. È evidente che se una funzione è uniformemente continua in I allora è anche continua in ogni punto di I.

Osservazione 25. Dunque una funzione f soddisfa la (36) e $\exists \overline{\delta_\varepsilon} : 0 < \overline{\delta_\varepsilon} \le \delta_{\varepsilon,x}\ \forall x \in I$ se e solo se la f è uniformemente continua. In altri termini, è possibile scegliere $\delta_{\varepsilon,x}$ nella (36) in modo tale che $\inf_{x \in I} \delta_{\varepsilon,x} = \overline{\delta_\varepsilon} > 0$ se e solo se f è uniformemente continua in I.

Osservazione 26. Mentre ha senso parlare di continuità di una funzione in un punto, anzi il concetto di continuità è un concetto che vale per una funzione *in un punto*, e poi si dice che è continua in un insieme se è continua in tutti i punti dell'insieme, non ha senso parlare di continuità uniforme di una funzione in un punto. Il concetto di *uniformità* vuol dire che qualcosa non dipende dal punto, e quindi non ha senso applicarlo quando il punto in cui studiamo la questione non varia.

Esempio 28. Sia $f(x) = x^2$, $I = [0,1]$. Allora abbiamo che $\forall x_1, x_2 \in [0,1]\ |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2|\,|x_1 - x_2| < 2|x_1 - x_2|$, pertanto se prendiamo $\delta_\varepsilon = \varepsilon/2$, abbiamo che $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$, da cui l'uniforme continuità della funzione nell'intervallo indicato.

Esempio 29. Sia $f(x) = 1/x$ e sia $I_\alpha = [\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$. Allora f è uniformemente continua in ogni intervallo I_α, *ma non nella loro unione* $\bigcup_{\alpha \in (0,1)} [\alpha, 1] = (0, 1]$. Infatti:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \frac{|x - x'|}{|x\,x'|} \le \frac{|x - x'|}{\alpha^2},$$

per cui scegliendo $\delta_\varepsilon = \alpha^2\varepsilon$ abbiamo che $|x - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |1/x - 1/x'| < \varepsilon$. Ma non possiamo prendere $\alpha = 0$ perché deve essere $\delta_\varepsilon > 0$. In effetti, la funzione *non è* uniformemente continua in $(0,1]$; infatti, prendiamo $x' = x + \delta$, allora:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \frac{\delta}{x(x + \delta)},$$

che, fissato δ, tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$. Pertanto non è possibile scegliere δ cosí piccolo da rendere $|1/x - 1/x'| < \varepsilon$ indipendentemente da x.

Fortunatamente il seguente teorema ci permette di evitare di stimare $\delta_{\varepsilon,x}$ ogni volta che dobbiamo determinare se una funzione è uniformemente continua.

Teorema 28 (Heine-Cantor)**.** *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è anche uniformemente continua nel medesimo intervallo.*

Dimostrazione. La dimostrazione utilizza la medesima tecnica dei teoremi di Bolzano-Weierstrass, di Heine-Borel e di Weierstrass.

Supponiamo che $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sia continua in $[a,b]$ ma non uniformemente continua. Essendo continua abbiamo che:

$$\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0\ \forall x' \in [a,b] : \quad |x - x'| < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

e *non* essendo la f uniformemente continua *non è possibile* scegliere $\delta_{\varepsilon,x}$ tale che $\inf_{x \in [a,b]} \delta_{\varepsilon,x} > 0$. Quindi obbligatoriamente $\inf_{x \in [a,b]} \delta_{\varepsilon,x} = 0$.

Come nelle dimostrazioni dei teoremi sopra citati, dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in due metà $[a,c]$ e $[c,b]$, dove $c = (a+b)/2$. Allora almeno una delle due seguenti affermazioni è valida:

$$\inf_{x \in [a,c]} \delta_{\varepsilon,x} = 0 \quad \text{oppure} \quad \inf_{x \in [c,b]} \delta_{\varepsilon,x} = 0;$$

eventualmente potrebbero essere vere entrambe. Scegliamo quindi dei due intervalli quello in cui l'estremo inferiore indicato è zero (oppure uno qualsiasi dei due, ad es. quello piú a destra, se fossero entrambe zero). Abbiamo cosí un intervallo $[a_1, b_1]$ in cui $\inf_{x\in[a_1,b_1]} \delta_{\varepsilon,x} = 0$. Ripetendo l'argomento, otteniamo due successioni a_k, crescente e limitata superiormente da b, e b_k, decrescente e limitata inferiormente da a, e tali che $b_k - a_k = (b-a)/2^k \to 0$. Pertanto entrambe convergono e convergono al medesimo limite $\alpha \in [a, b]$.

Se $\inf_{x\in[a_k,b_k]} \delta_{\varepsilon,x} = 0$ vuol dire che $\forall\eta > 0$, $\exists x, x' \in [a_k, b_k]$ tali che $|x - x'| < \eta$ e $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Quindi in ciascun intervallo $[a_k, b_k]$ la f varia piú di ε.

Ma f è continua in α, per cui $\exists\,\vartheta > 0$ tale che in $(\alpha - \vartheta, \alpha + \vartheta)$ la funzione varia meno di ε: infatti $\exists\vartheta > 0$ tale che $x \in (\alpha - \vartheta, \alpha + \vartheta) \Rightarrow |f(\alpha) - f(x)| < \varepsilon/2$ e $x' \in (\alpha - \vartheta, \alpha + \vartheta) \Rightarrow |f(\alpha) - f(x')| < \varepsilon/2$ per cui $|f(x) - f(x')| \leq |f(\alpha) - f(x)| + |f(\alpha) - f(x')| < \varepsilon$. Ma l'intervallo $(\alpha - \vartheta, \alpha + \vartheta)$ contiene $[a_K, b_K]$ per K sufficientemente grande, in cui f varia piú di ε, da cui la contraddizione. □

Osservazione 27. Non è difficile, utilizzando il medesimo argomento utilizzato nella dimostrazione del teorema di Heine-Borel, dimostrare che se f è continua in un qualunque insieme I chiuso e limitato (non necessariamente un intervallo) allora è uniformemente continua in I.

7. Esempi ed esercizi

Esercizio 1. Calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{2^n}.$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{2^n} = \left(\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{3^n}\right)^{(2/3)^n},$$

e $\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{3^n}$ è una sottosuccessione di $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to e$. Quindi:

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{2^n} = (e + o(1))^{(2/3)^n} = e^{(2/3)^n}(1 + o(1))^{(2/3)^n} \to 1.$$

Esercizio 2. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - \cos(\sin x)}{\log(1 + \tan 3x^2)}.$$

Soluzione. Abbiamo:

$$e^{x^3} - \cos(\sin x) = 1 + x^3 + o(x^3) - \cos(x + o(x)) = 1 + x^3 + o(x^3) - 1 + \frac{(x + o(x))^2}{2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

e:

$$\log(1 + \tan 3x^2) = \log(1 + 3x^2 + o(x^2)) = 3x^2 + o(x^2),$$

per cui:

$$\frac{e^{x^3} - \cos(\sin x)}{\log(1 + \tan 3x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(1)}{3 + o(1)} = \frac{1}{6} + o(1) \to \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{1-e^{x^2}}}{\log \tan x}, \\ g(x) = (\log(1 + \tan x))^2, \\ h(x) = (e^{x^2/2} - \cos x) \log \sin x. \end{cases}$$

Soluzione. Abbiamo:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x^2 + o(x^2)}}{\log(x + o(x))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\log x + o(1)},$$

perché $\log(x + o(x)) = \log(x(1 + o(1)) = \log x + \log(1 + o(1)) = \log x + o(1)$, pertanto:

$$f(x) = \frac{x^2(1 + o(1))}{(1 + o(1)/\log x) \log x} = \frac{x^2(1 + o(1))}{(1 + o(1)) \log x},$$

perché $o(1)/\log x \to 0$ e quindi è $o(1)$, e allora:

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x}(1 + o(1)) = \frac{x^2}{\log x} + o\left(\frac{x^2}{\log x}\right).$$

Poi:

$$g(x) = (\log(1 + x + o(x)))^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2).$$

Infine:

$$\begin{aligned} h(x) = (1 + x^2/2 + o(x^2) - 1 + x^2/2 + o(x^2)) \log(x + o(x)) = x^2 \log x(1 + o(1)) = \\ = x^2 \log x + o(x^2 \log x). \end{aligned}$$

Quindi l'ordinamento corretto è h, g, f. Infatti tutte e tre contengono la potenza x^2, ma h è "rallentata" dal fattore $\log x$ che tende a ∞ per $x \to 0$, mentre f è "accelerata" dal fattore $1/\log x$ che invece tende a 0 per $x \to 0$.

Esempio 30. Sia $f(x) = x$ e $g(x) = x + \log x$. Allora per $x \to +\infty$ $f(x) \sim g(x)$, cioè sono del *medesimo ordine*, in quanto ovviamente $\lim_{x\to+\infty} (x + \log x)/x = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\log x}{x}) = 1$. Componendo però f e g con *la medesima funzione* non è detto che continuino ad essere del medesimo ordine! Ad esempio, se $\tilde{f}(x) = e^{f(x)} = e^x$ e $\tilde{g}(x) = e^{g(x)} = xe^x$ allora $\tilde{g}(x)$ tende a $+\infty$ *piú rapidamente* di $\tilde{f}(x)$.

Esercizio 4. Calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n + 1)^n - (t \log n)^n + 2}{n! + 3n^{n+1} \sin \frac{1}{n}}.$$

Esercizio 5. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\cos 4x}{3\sin^2 2x}.$$

Esercizio 6. Calcolare il limite:
$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n^2\sin(1/2n)}}-1\right).$$

Esercizio 7. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\cos x}-\frac{1}{1-x^2}}{(\log(1+\sin x))^2}.$$

Esercizio 8. Calcolare il limite:
$$\lim_{n\to\infty} n^2\tan^2(n\sin(1/2n^2)).$$

Esercizio 9. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\log(1+x)-e^{x^4}+\cos x}{\tan^2\sin x}.$$

Esercizio 10. Calcolare il limite:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1/n!}{n^3\log(1+1/n)}.$$

Esercizio 11. Calcolare il limite:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1/n!}{n^4\sin 1/n}.$$

Esercizio 12. Calcolare il limite:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Esercizio 13. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\sin^2 x}-\cos x^2\right)}{\cos x-e^{x^4}}.$$

Esercizio 14. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x\to 0^+$ le seguenti funzioni:
$$\begin{cases} f(x) = (x^{x/2}-1)\sin(x\log x), \\ g(x) = \frac{\sin^4 x}{\sin x^2}+e^{x^2}-\cos x^3, \\ h(x) = \frac{(1-e^{(\log x)(\sin x)})^2}{\tan\log x}. \end{cases}$$

Esercizio 15. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x\to 0^+$ le seguenti funzioni:
$$\begin{cases} f(x) = (1-\cos(1-\cos x))\log(1+\tan e^{-\frac{1}{x}}), \\ g(x) = \log(1+\tan^2 x^2)+e^{1-\cos x}-e^{\tan x}, \\ h(x) = \left(e^{\frac{x}{1-x}}-\cos x^3\right)\log\frac{x^2}{1+x^2}. \end{cases}$$

Esercizio 16. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} f(x) = (x^x - 1)\sin(x \log x), \\ g(x) = \log\cos x^2 + e^{x^2} - e^{x^4}, \\ h(x) = \frac{1-\cos(x \log x)}{\log x}. \end{cases}$$

Esercizio 17. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2|x|-x^2}{/} x + \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{\sin \pi x}{x-2} & \text{se } x \neq 0, 1, 2 \\ 0 \quad \text{se } x = 0, 1, \\ \frac{5}{3} + \pi \quad \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Determinare i punti in cui la funzione è continua e la natura degli eventuali punti di discontinuità.