

# Note del Corso di Analisi Matematica 1\*

Alberto Berretti

## Parte II.

### Funzioni di variabile reale e successioni

In questo capitolo introduciamo i concetti piú elementari relativi alle funzioni di una variabile reale, e poi introduciamo le piú note funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche e poche altre. Studieremo quindi come ricavare le proprietà elementari di funzioni composte a partire da queste, e introdurremo in modo assolutamente introduttivo ed elementare alcune applicazioni geometriche interessanti (i sistemi di coordinate curvilinee nel piano e nello spazio, le equazioni di alcune curve e superfici elementari) che saranno approfondite in seguito. Infine studieremo le proprietà elementari delle successioni (reali), cioè delle funzioni da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ , quelle funzioni, cioè, in cui la variabile dipendente invece che essere continua varia in un insieme discreto (tipicamente, appunto, i numeri naturali). Introdurremo quindi alcune funzioni aritmetiche interessanti, come il fattoriale, e faremo qualche cenno al cosiddetto calcolo combinatorio.

#### 1. Funzioni reali di variabile reale

##### 1.1. Proprietà elementari

Studiamo ora le proprietà elementari delle funzioni reali di una variabile reale, cioè delle funzioni:

$$f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

---

\*Quest'opera è distribuita con licenza "Creative Commons - Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0 Italia (CC BY-NC-ND 3.0)" (v. <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/it/deed.it>). Ringrazio il Prof. Roberto Zanasi (<http://prooof.blogspot.com/>) per molti utili suggerimenti volti a migliorare la qualità di questo testo.

### 1.1.1. Monotonia

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo in cui la funzione  $f$  è definita. Una funzione  $f(x)$  viene detta **CRESCENTE** nell'intervallo  $I$  se:

$$\forall x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \quad (1)$$

viene detta **STRETTAMENTE CRESCENTE** nell'intervallo  $I$  se:

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y), \quad (2)$$

viene detta **DECRESCENTE** nell'intervallo  $I$  se:

$$\forall x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), \quad (3)$$

viene detta **STRETTAMENTE DECRESCENTE** nell'intervallo  $I$  se:

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y). \quad (4)$$

È evidente che una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente è anche crescente o decrescente! in altri termini, “strettamente” specifica che non può essere costante ma deve effettivamente crescere o decrescere. È anche evidente che una funzione può essere crescente in *alcuni* intervalli contenuti nel suo dominio, e decrescente in altri.

È importante capire che le proprietà di crescita o decrescenza sono proprietà di una funzione *in un intervallo*; qualora questo non venga menzionato, *si sottintende l'intero dominio di definizione* (come è stato fatto nel capitolo precedente in un contesto astratto).

Se una funzione ha un andamento ben definito in un intervallo, e cioè in un intervallo dato è sempre crescente o sempre decrescente, allora si dice che è *ivi MONOTONA*. Diremo che è **STRETTAMENTE MONOTONA** se è *strettamente* crescente o decrescente.

**Esempio 1.** La funzione costante  $f(x) = a$ , dove  $a \in \mathbb{R}$  qualsiasi, è sia crescente che decrescente nell'intero dominio di definizione  $\mathbb{R}$ , ma non strettamente tale (rifletterci sopra un attimo!).

L'unica funzione contemporaneamente crescente e decrescente in un intervallo è la funzione *ivi* costante.

**Esempio 2.** La funzione identità sui reali  $f(x) = x$  è ovviamente strettamente crescente nell'intero dominio di definizione  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 3.** La funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente crescente nell'intervallo  $[0, +\infty)$  e strettamente decrescente nell'intervallo  $(-\infty, 0]$ .

**Esempio 4.** La funzione  $f(x) = x^3$  è strettamente crescente nell'intero dominio di definizione  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 5.** La funzione  $f(x) = \sin x$  è, ad es., strettamente crescente nell'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$  e strettamente decrescente nell'intervallo  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Non è né crescente né decrescente nell'unione dei due intervalli  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ !

Richiameremo la definizione e le proprietà delle funzioni trigonometriche più avanti; intanto assumiamo che lo studente le abbia già studiate alle scuole superiori.

È facile rendersi conto che la composta di due funzioni crescenti è crescente, che la composta di due funzioni decrescenti è *crescente*, e che la composta di una funzione crescente ed una decrescente è decrescente. Inoltre la *somma di due funzioni crescenti è crescente*, la *somma di due funzioni decrescenti è decrescente*, mentre non possiamo dire nulla della somma di una funzione crescente ed una funzione decrescente. Per quanto riguarda il prodotto la situazione è più complicata a causa del segno; il *prodotto di due funzioni crescenti e positive è crescente*; infatti, se:

$$x \leq y \Rightarrow 0 < f(x) \leq f(y), \quad 0 < g(x) \leq g(y)$$

allora moltiplicando membro a membro le due disuguaglianze otteniamo:

$$0 < f(x)g(x) \leq f(y)g(y),$$

cioè la crescita del prodotto. Analogamente per la decrescenza. Gli altri casi possono essere dedotti tenendo conto delle proprietà delle disuguaglianze.

**Esempio 6.** La funzione  $(\sin x)^2$ , funzione composta di  $\sin x$  e  $x^2$ , è *crescente* nell'intervallo  $[\pi, 3\pi/2]$ : infatti (i) nell'intervallo  $[\pi, 3\pi/2]$  la funzione  $\sin x$  è *decrescente* e *negativa*, (ii) per valori *negativi* del suo argomento, la funzione quadrato è *decrescente* quindi la composta di due funzioni decrescenti negli intervalli considerati è *crescente*.

Infine, il *reciproco*  $1/f(x)$  di una funzione crescente e positiva  $f(x)$  è decrescente; infatti, se:

$$x \leq y \Rightarrow 0 < f(x) \leq f(y)$$

allora invertendo l'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$\frac{1}{f(y)} \leq \frac{1}{f(x)}.$$

Lo stesso risultato vale se la funzione è crescente e negativa:

$$f(x) \leq f(y) < 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{f(y)},$$

ma non se la funzione, pur monotona nell'intervallo, è sia negativa che positiva! Tutti gli altri casi si possono ottenere, in questo caso ed in quello del prodotto, dallo studio delle disuguaglianze prestando sempre attenzione ai segni.

È importante osservare che se una funzione è ad es. crescente nell'intervallo  $A$  e nell'intervallo  $B$  non è affatto detto che sia crescente *nell'unione di tali intervalli!* Infatti la funzione potrebbe essere crescente in  $A$  e crescente in  $B$  con l'intervallo  $B$  a destra di  $A$  (e quindi contenente numeri maggiori) ma tutti i valori della funzione in  $B$  potrebbero essere minori dei valori che la funzione ha in  $A$ . Ad es. se consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } x \in [-1, 0), \\ x - 1 & \text{per } x \in [0, 1], \end{cases}$$

abbiamo che la funzione, definita nell'intero intervallo  $[-1, 1]$ , è *crescente* in ciascuno degli intervalli  $[-1, 0)$  e  $[0, 1]$ , ma non nell'intero intervallo di definizione perché, ad es.,  $f(-1/2) = 1/2 > f(1/2) = -1/2$  (v. fig. 1). V. anche l'esempio 5 sopra.

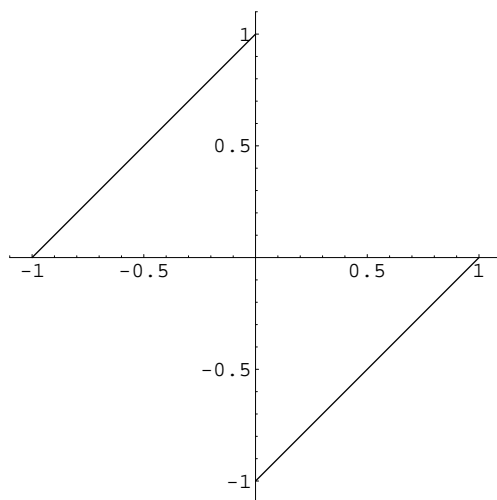


Figura 1: Funzione crescente in due intervalli ma non nella loro unione.

Un teorema importante, anche se di dimostrazione ovvia, è il seguente.

**Teorema 1.** *Se  $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  è strettamente monotona nel suo dominio  $A$ , allora  $f$  è invertibile.*

*Dimostrazione.* È infatti evidente che  $f$  deve essere iniettiva, cioè due valori uguali di  $f(x)$  non possono essere ottenuti per valori *diversi* di  $x$ , perché altrimenti la funzione non potrebbe essere monotona. □

### 1.1.2. Positività

Una funzione si dice **POSITIVA** se per ogni  $x$  nel suo dominio  $f(x) \geq 0$ , **STRETTAMENTE POSITIVA** se  $f(x) > 0$ , **NEGATIVA** se  $f(x) \leq 0$ , **STRETTAMENTE NEGATIVA**  $f(x) < 0$ .

Se  $f(x)$  è una funzione reale qualsiasi, allora possiamo definire la sua PARTE POSITIVA:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}, \quad (5)$$

e la sua PARTE NEGATIVA:

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}. \quad (6)$$

Si noti che  $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$ ,  $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ .

### 1.1.3. Estremi

Nel capitolo precedente abbiamo definito il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme contenuto in un insieme totalmente ordinato: ovviamente tutti i concetti appresi si applicano *verbatim* ad insiemi di numeri reali.

Aggiungiamo la seguente notazione: se un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  è *illimitato superiormente* allora diremo che il suo estremo superiore è infinito e scriveremo  $\sup A = +\infty$ , mentre se è *illimitato inferiormente* diremo che il suo estremo inferiore è (meno) infinito e scriveremo  $\inf A = -\infty$ .

Definiamo ora il massimo, il minimo, l'estremo superiore, l'estremo inferiore di una funzione.

Il MASSIMO di una funzione  $f(x)$  in un insieme  $A$  contenuto nel suo dominio di definizione è il *massimo dell'insieme dei valori che la funzione  $f(x)$  assume al variare di  $x$  in  $A$* . In formule:

$$\max_{x \in A} f(x) = \max\{f(x), x \in A\}; \quad (7)$$

analogamente:

$$\min_{x \in A} f(x) = \min\{f(x), x \in A\}. \quad (8)$$

Definizioni simili valgono per gli estremi superiore ed inferiore:

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x), x \in A\}, \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x), x \in A\}. \quad (9)$$

Se l'indicazione dell'insieme manca, si sottintende che il massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore è preso sull'intero dominio della funzione. Inoltre, se la cosa non desta ambiguità, si può scrivere  $\max$  invece che  $\max_A$  e così via.

Non si deve fare confusione con gli *estremi locali* di una funzione reale, che saranno definiti e studiati più avanti.

**Esempio 7.** Se  $f(x) = x^2$ , allora:

$$\max_{[0,2]} f(x) = \max [0, 4] = 4,$$

$$\min_{[0,2]} f(x) = \min [0, 2] = 0,$$

$$\sup_{(0,+\infty)} f(x) = \sup(0, +\infty) = +\infty,$$

$$\inf_{(0,+\infty)} f(x) = \inf(0, +\infty) = 0,$$

$$\min_{(0,+\infty)} f(x) \text{ non esiste.}$$

L'ultimo minimo non esiste perché l'insieme:

$$\{x^2, x \in (0, +\infty)\} = (0, +\infty)$$

contiene numeri reali positivi arbitrariamente piccoli, ma non contiene lo zero; quindi non esiste un numero più piccolo di tutti, perché preso un qualsiasi numero in tale insieme, per quanto piccolo, ne esiste sempre un altro nell'insieme ancora più piccolo (ad es. la sua metà). L'estremo inferiore invece esiste: infatti ogni numero negativo e lo zero sono suoi minoranti, e di tale insieme lo zero è il massimo.

Quando parliamo di massimo o di minimo di una funzione, ci riferiamo ai *valori* massimi o minimi che la funzione può avere in un certo intervallo, *non ai valori della variabile indipendente* per cui tale massimo o minimo è ottenuto. Quest'ultimi valori sono detti invece PUNTI DI MASSIMO e PUNTI DI MINIMO e sono una cosa diversa.

#### 1.1.4. Simmetrie

Una funzione è PARI se soddisfa:

$$f(-x) = f(x), \quad (10)$$

e DISPARI se soddisfa:

$$f(-x) = -f(x). \quad (11)$$

Ovviamente affinché tali definizioni abbiano senso, la funzione  $f$  deve essere definita in un dominio  $A$  SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, cioè tale che:

$$x \in A \Rightarrow -x \in A. \quad (12)$$

Ovviamente una funzione può essere né pari né dispari.

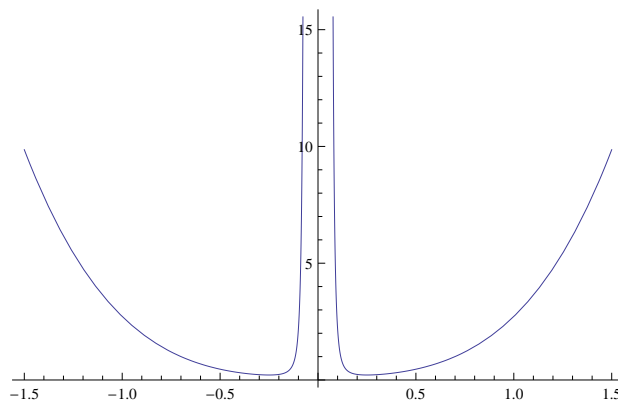
**Esempio 8.** La funzione  $x^2$  è pari. La funzione  $x^3$  è dispari. La funzione  $\sin x$  è dispari. La funzione  $\cos x$  è pari. La funzione  $x + x^2$  non è né pari né dispari.

Se  $f(x)$  è una funzione definita in un insieme  $A$  simmetrico rispetto all'origine, possiamo definirne la PARTE PARI:

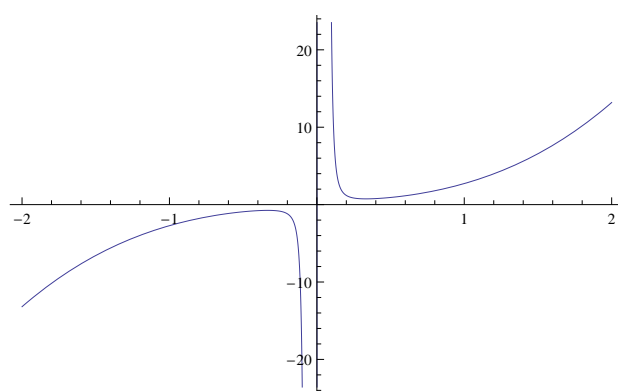
$$f^{(e)}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad (\text{"e" per "even"}), \quad (13)$$

e la PARTE DISPARI:

$$f^{(o)}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (\text{"o" per "odd"}). \quad (14)$$



(a) Una funzione pari



(b) Una funzione dispari

Figura 2: Funzioni pari e dispari.

È immediato verificare che  $f^{(e)}(x)$  è pari e che  $f^{(o)}(x)$  è dispari, e naturalmente  $f^{(e)}(x) + f^{(o)}(x) = f(x)$ . In fig. 2 abbiamo un esempio di una funzione pari e di una funzione dispari.

Le proprietà di parità di una funzione sono delle proprietà di simmetria rispetto all'origine, perché hanno a che fare con l'*inversione rispetto all'origine*  $x \mapsto -x$ . Si potrebbero definire analoghe proprietà di simmetria rispetto ad altri punti. Ad es. l'inversione rispetto al punto  $x = x_0$  è data dalla formula:

$$x \mapsto x_0 - (x - x_0) = 2x_0 - x, \quad (15)$$

per cui una FUNZIONE PARI RISPETTO AD  $x_0$  è una funzione tale che  $f(2x_0 - x) = f(x)$ , ed una FUNZIONE DISPARI RISPETTO A  $x_0$  è una funzione tale che  $f(2x_0 - x) = -f(x)$ . Va da sé che il dominio di definizione dovrà essere simmetrico rispetto al punto  $x_0$ .

È assolutamente elementare verificare che se una funzione è pari ed è *crescente* in un intervallo  $I$  contenuto nei positivi, allora è *decescente* nell'intervallo simmetrico contenuto nei negativi. Se invece una funzione è *decescente* in un intervallo  $I$  contenuto nei positivi, allora è *crescente* nell'intervallo simmetrico contenuto nei negativi. L'opposto vale se è dispari.

Un'altra proprietà di simmetria importante è la *periodicità*. Una funzione  $f$  viene detta PERIODICA se esiste un reale  $T \neq 0$  tale che:

$$f(x + T) = f(x). \quad (16)$$

Si dice che il numero  $T$  è UN PERIODO della funzione  $f$ . È evidente che se  $T$  è un periodo, allora anche  $2T$ ,  $3T$ , ed in generale  $nT$ , dove  $n$  è un intero, sono periodi della funzione. Il periodo  $T$  della funzione con il più piccolo valore assoluto viene detto PERIODO MINIMALE o semplicemente PERIODO della funzione. Il fatto che il periodo minimale esista in generale non è completamente banale. Non è nemmeno completamente banale il fatto che *tutti* i periodi di una funzione “sufficientemente regolare” (cheché ciò voglia dire!) e non costante siano multipli di tale periodo minimale.

Le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) sono esempi famosi ed importanti di funzioni periodiche.

È chiaro che una funzione periodica non può essere definita solo in un intervallo, perché la traslazione espressa dalla definizione di periodicità porterebbe fuori dal dominio della funzione. Basta riflettere un istante ad es. sul caso della funzione  $\tan x$  per capire che non è necessario che il dominio sia tutto  $\mathbb{R}$ : basta che anche gli eventuali punti in cui la funzione non è definita si ripetano periodicamente con il medesimo periodo.

## 1.2. Funzioni elementari

Introduciamo ora alcune funzioni elementari, in realtà ben note fin dalle scuole inferiori, e studiamone le principali proprietà.

### 1.2.1. Potenze e radici

Consideriamo dapprima le potenze  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , cioè naturale. Il dominio è sempre l'intero insieme dei reali.

Se  $n = 0$  allora  $f(x) = 1$ , e la funzione è costante.

Se  $n \neq 0$  allora  $f(0) = 0$ .

Se  $n = 1$  allora  $f(x) = x$  e la funzione è la funzione identità.

Se  $n \neq 0$  è pari, la funzione è pari, strettamente crescente in  $[0, +\infty)$  e strettamente decrescente in  $(-\infty, 0]$ .

Se  $n$  è dispari, la funzione è dispari, strettamente crescente in tutto  $\mathbb{R}$ .

È evidente che se  $n \neq 0$  allora  $x^n$  può essere arbitrariamente grande: basta osservare che  $x^n > x$  se  $x > 1$  e  $n > 0$ . Quindi  $\sup x^n = +\infty$ , dove si intende che l'estremo superiore è preso in tutto  $\mathbb{R}$ . Se  $n$  è pari,  $x^n \geq 0$ ; se  $n$  è dispari, invece, è positiva sui positivi e negativa sui negativi (essendo dispari!). Ne segue che, sempre per  $n > 0$ ,  $\inf x^n = 0$  per  $n$  pari (in effetti l'estremo inferiore è un minimo) e  $\inf x^n = -\infty$  per  $n$  dispari.

In fig. 3 vediamo il grafico di alcune potenze intere.

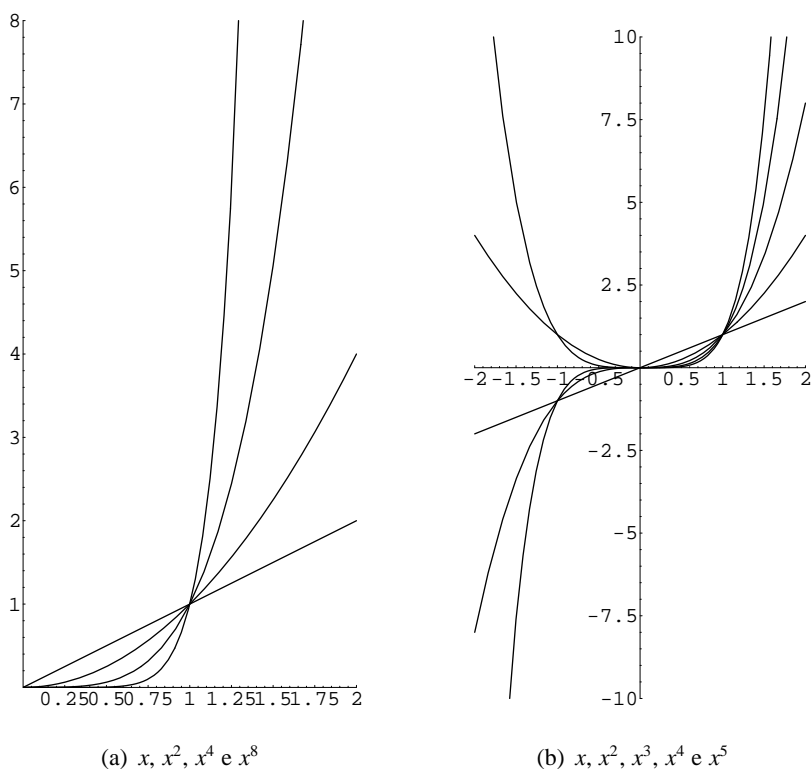


Figura 3: Grafici di alcune potenze intere.

Osserviamo infine che se  $x \in (0, 1)$  allora  $x^n$  diventa sempre piú piccolo man mano che  $n$  cresce: infatti moltiplicando per ulteriori fattori  $x$ ,  $0 < x < 1$  non facciamo altro che *diminuire* il prodotto (v. fig. 4); al contrario, per  $x \in (1, +\infty)$   $x^n$  diventa sempre piú grande man mano che  $n$  cresce: infatti moltiplicando per ulteriori fattori  $x > 1$  non facciamo altro che *ingrandire* il prodotto.

Consideriamo ora potenze intere negative. Basta in realtà considerare  $f(x) = 1/x$ , e poi comporre tale funzione con le potenze intere positive viste precedentemente.

Innanzitutto, la funzione  $1/x$  non è definita se  $x = 0$ , è (strettamente) positiva per  $x > 0$  e (strettamente) negativa per  $x < 0$ . In ciascuno degli intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(0, \infty)$  essa è decrescente. Si osservi che *nell'unione di tali intervalli* non possiamo dire che la funzione  $1/x$  è decrescente! Infatti ad es.  $-1 < 1$  ma  $1/(-1) < 1/1$  e non il contrario.

Anche se la nozione precisa di limite verrà introdotta piú avanti, si verifica immediatamente che se  $x$  è preso molto piccolo, sufficientemente piccolo allora  $1/x$  diventa molto grande, arbitrariamente grande, e viceversa se  $x$  viene preso molto grande, sufficientemente grande, allora  $1/x$  diventa molto piccolo, arbitrariamente piccolo.

Gli andamenti qualitativi delle funzioni  $1/x^n$  vengono dedotti facilmente a partire da quelli delle potenze  $x^n$  e di  $1/x$ , componendo le due funzioni. In fig. 5 vediamo i grafici delle funzioni  $1/x$ ,  $1/x^2$ ,  $1/x^5$ ,  $1/x^6$ .

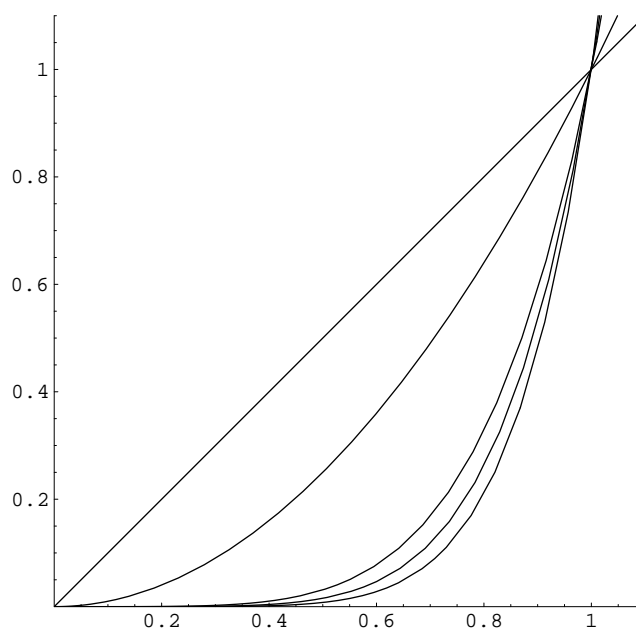


Figura 4: Grafici delle funzioni  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^5$ ,  $x^6$  e  $x^7$  nell'intervallo  $x \in [0, 1]$ .

Le radici sono definite come inverse delle potenze. Le radici di indice pari sono definite solo per valori dell'argomento maggiori o uguali a 0, mentre quelle di indice dispari per ogni valore dell'argomento. Sono tutte strettamente crescenti nel loro dominio. In fig. 6 vediamo i grafici di alcune radici.

Le potenze di esponente frazionario o reale, tipicamente definite solo per valori positivi del loro argomento, hanno andamenti che è facile dedurre a partire dai risultati precedenti.

### 1.2.2. Polinomi

Ricordiamo che un POLINOMIO di grado  $n$  in una variabile  $x$  è una espressione della forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0. \quad (17)$$

Un polinomio è naturalmente definito per ogni valore della variabile  $x$ . La nozione di polinomio è ben nota fin dalle scuole inferiori e non c'è bisogno di altre definizioni.

**Esercizio 1.** Disegnare il grafico di  $x^2$  e  $x^3$ . Disegnare poi il grafico del polinomio  $x^3 + x^2$  prestando rispettivamente attenzione al comportamento del polinomio per  $x$  piccoli e per  $x$  grandi; confrontare con i grafici separati delle due potenze (ad es. disegnando insieme i grafici delle tre funzioni prendendo come intervallo per la variabile  $x$  prima  $[-0.05, 0.05]$  e poi  $[-50, 50]$ ).

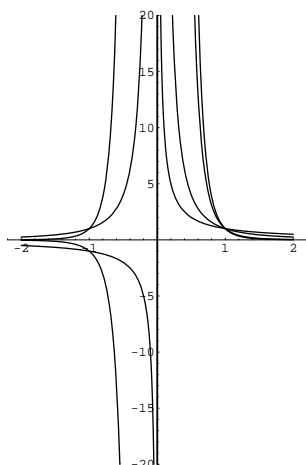


Figura 5: Grafici di  $1/x$ ,  $1/x^2$ ,  $1/x^5$ ,  $1/x^6$ .

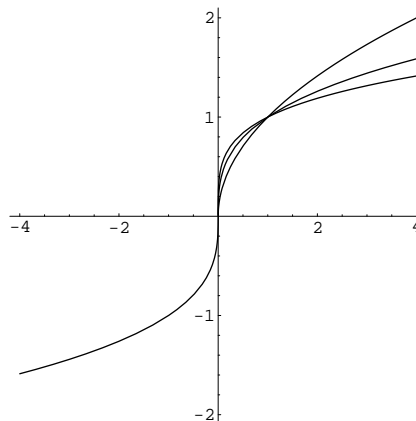


Figura 6: Grafici di  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt[4]{x}$ .

### 1.2.3. Funzioni razionali

Una FUNZIONE RAZIONALE è una funzione che, *eventualmente dopo semplificazioni algebriche*, viene scritta come quoziente di due polinomi:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (18)$$

Una funzione razionale può essere anche scritta come una più generale espressione algebrica, che però contenga solo potenze della variabile  $x$ , somme, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Una tale espressione può sempre essere scritta nella forma (18); occorre però osservare che, nel corso dei passaggi e delle semplificazioni che portano alla forma (18), il dominio della funzione può subire delle modifiche. Ad es. la seguente è una funzione razionale:

$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x-1)},$$

peché è costruita usando esclusivamente le operazioni anzidette; il dominio di  $R(x)$  è formato da tutti gli  $x$  reali e diversi da 0, 1 e  $-1$ . Ora, è anche vero che:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 1, -1 : \quad R(x) = \frac{2}{x^2 - 1},$$

come un semplice calcolo mostra immediatamente, ma ora la funzione  $2/(x^2 - 1)$  è definita per ogni  $x$  reale diverso da  $\pm 1$ , 0 incluso! Quindi durante i passaggi che hanno portato dalla forma “estesa” della funzione  $R$  alla sua rappresentazione (18) come quoziente di polinomi è avvenuta una *semplificazione di un fattore  $x$  a numeratore e denominatore*, che ha portato all’estensione del dominio della funzione. In altri termini, le due funzioni:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{e} \quad \frac{2}{x^2 - 1}$$

devono essere considerate, a rigore, due funzioni diverse perché il dominio delle due funzioni è diverso, anche se poi ovviamente esse sono uguali ovunque siano entrambe definite. Nei corsi di matematica elementare si parla di diverse “condizioni di esistenza”, come lo studente accorto capisce quando realizza che per fare la semplificazione indicata occorre assumere  $x \neq 0$ .

In opportuno contesto, la differenza fra due funzioni come sopra verrà sostanzialmente cancellata. È anche evidente che da qualunque punto di vista “pratico”, applicativo, le due funzioni sono “la stessa cosa”. *Ciò non vuol dire che non si debba stare attenti a cosa succede al dominio di una funzione quando si fanno passaggi e semplificazioni apparentemente inoffensivi!*

#### 1.2.4. Esponenziale e logaritmo

Le FUNZIONI ESPONENZIALI SONO funzioni del tipo:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0. \quad (19)$$

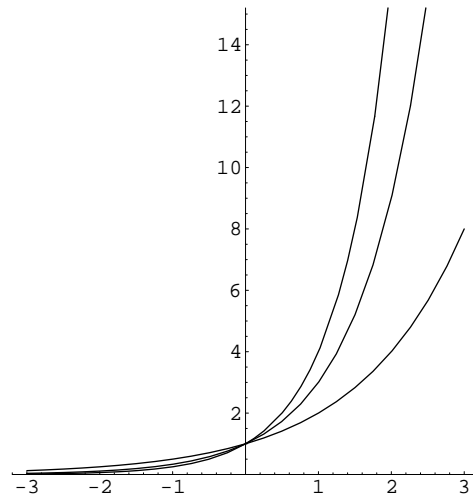
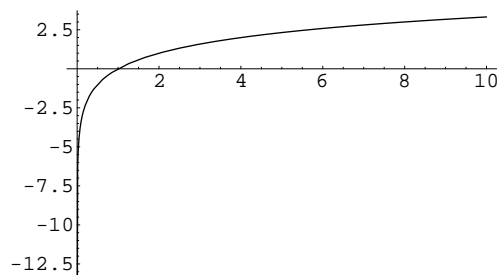
Il caso  $a = 1$  è insignificante (in tal caso infatti  $a^x = 1$  per ogni  $x$  e la funzione è costante!), per cui nel seguito escluderemo sempre  $a = 1$ .

Più avanti vedremo che c'è un valore “speciale” di  $a$  che sarà particolarmente interessante, che si denota con la lettera  $e$ , e per FUNZIONE ESPONENZIALE si intenderà quella che ha per base appunto il numero  $e$ .

Una funzione esponenziale è definita per ogni  $x$ . Dalle proprietà delle potenze seguono facilmente le sue proprietà. Innanzitutto,  $a^x > 0$  per ogni  $x$  reale. Inoltre, se  $0 < a < 1$  la funzione è monotona decrescente, mentre se  $a > 1$  la funzione è monotona crescente. Ovviamente, più  $a > 1$  è grande più la funzione “cresce in fretta” e più  $a < 1$  è piccolo più la funzione “decrece in fretta”; anche se ancora non sappiamo dare un significato rigoroso a tali espressioni, una rapida occhiata ai grafici di fig. 7 dovrebbe far capire esattamente di cosa parliamo.

Si osservi anche che se  $a < 1$  allora  $1/a > 1$  e  $a^x = (1/a)^{-x}$ , per cui possiamo ricondurre lo studio di esponenziali di base compresa fra 0 e 1 a quello di esponenziali di base maggiore di 1 dopo aver fatto la sostituzione  $x \mapsto -x$  (che graficamente vuol dire invertire l'asse delle  $x$ ). D'ora in poi consideriamo sempre basi maggiori di 1, visto che è sempre possibile ricondursi a tale caso.

Poiché l'esponenziale è strettamente monotona, è invertibile, e la sua inversa prende il nome di logaritmo. Essendo l'esponenziale sempre positivo, il logaritmo è definito solo per valori positivi del suo argomento. L'andamento qualitativo del logaritmo può quindi essere facilmente ricavato da quello dell'esponenziale, semplicemente “scambiando gli assi”. In particolare, per valori maggiori di 1 della base è strettamente crescente, assume valori arbitrariamente grandi per valori dell'argomento sufficientemente grandi ed assume valori arbitrariamente grandi e negativi per valori sufficientemente piccoli dell'argomento. Nella fig. 8 seguente vediamo ad es. il grafico della funzione  $\log_2 x$ .

Figura 7: Grafici di  $2^x$ ,  $3^x$ ,  $4^x$ .Figura 8: Grafico di  $\log_2 x$ .

### 1.2.5. Funzioni trigonometriche

Richiamiamo ora la definizione delle funzioni trigonometriche.

Con riferimento alla figura 9, considerato il cerchio di centro  $O$  e raggio  $\overline{OA} = 1$ , detto CERCHIO TRIGONOMETRICO, sia  $x$  il doppio dell'area del settore circolare  $OPA$ . Definiamo allora le funzioni:

$$\sin x = \overline{OR}, \quad \cos x = \overline{OQ}, \quad (20)$$

dove le lunghezze dei segmenti sono prese con il segno del semiasse in cui giacciono. Tali funzioni sono dette rispettivamente SENO e COSENO di  $x$ .

Si osservi che in questo modo il numero  $\pi$  è automaticamente definito come l'area del cerchio unitario.

Dobbiamo pensare che il numero  $x$ , che misura l'ANGOLO  $P\hat{O}A$ , indichi effettivamente la posizione del punto  $P$  sul cerchio:  $x$  vale 0 in  $A$ , e vale  $2\pi$  quando si trova di nuovo in  $A$  dopo aver fatto un giro intero; pertanto possiamo immaginare che  $x$  assuma qualsiasi valore reale, inclusi valori negativi, e che valori reali che differiscano di  $2\pi$  o suoi multipli interi corrispondano alla medesima posizione sul

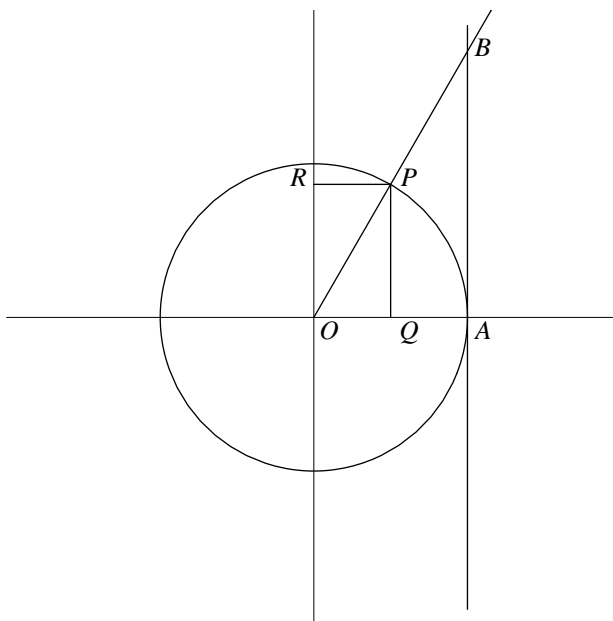


Figura 9: Il cerchio trigonometrico

cerchio. Ad es. se il punto  $P$  si trova nel quarto quadrante potremo dire che  $x$  è compreso fra  $-\pi/2$  e  $0$  – quindi negativo –, oppure che è compreso fra  $3\pi/2$  e  $2\pi$  (ma non fra  $3\pi/2$  e  $0$ !). In tal modo le funzioni trigonometriche sono automaticamente definite come funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .

Definiamo inoltre:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad (21)$$

dette rispettivamente TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE e COSECANTE di  $x$ ; le ultime tre sono usate di rado.

Si osservi che  $\tan x$  è uguale alla lunghezza del segmento  $\overline{AB}$  ovvero al doppio dell'area del triangolo  $OAB$ , sempre facendo riferimento alla fig. 9.

Quella che abbiamo dato in realtà è una definizione carente. Infatti, mentre è abbastanza chiaro cosa vuol dire la lunghezza di un segmento, non è affatto chiaro cosa voglia dire l'area di una certa regione geometrica, in particolare se limitata da una curva. Il concetto di area di una regione del piano sarà reso rigoroso solo più avanti mediante l'integrale. Una alternativa potrebbe essere definire  $x$  come la lunghezza dell'arco  $AP$ : ma di nuovo non abbiamo ancora definito la lunghezza di una curva, cosa che faremo più avanti sempre per mezzo di un'integrale. Le definizioni tradizionali delle funzioni trigonometriche sono pertanto equivalenti alle definizioni analitiche per mezzo di un integrale. È importante sottolineare che non si tratta dell'unica definizione analitica delle funzioni trigonometriche, e nemmeno della migliore. La definizione "liceale" tradizionale – utilizzando la lunghezza dell'arco – è più difficile da rendere rigorosa di quella che utilizza l'area del settore circolare perché la nozione di lunghezza di una curva è più difficile da rendere rigorosa di quella di area.

È facile dalla definizione di seno e coseno ricavare i loro grafici qualitativi e da questi quelli delle altre funzioni trigonometriche, che riportiamo nella figura 10 seguente.

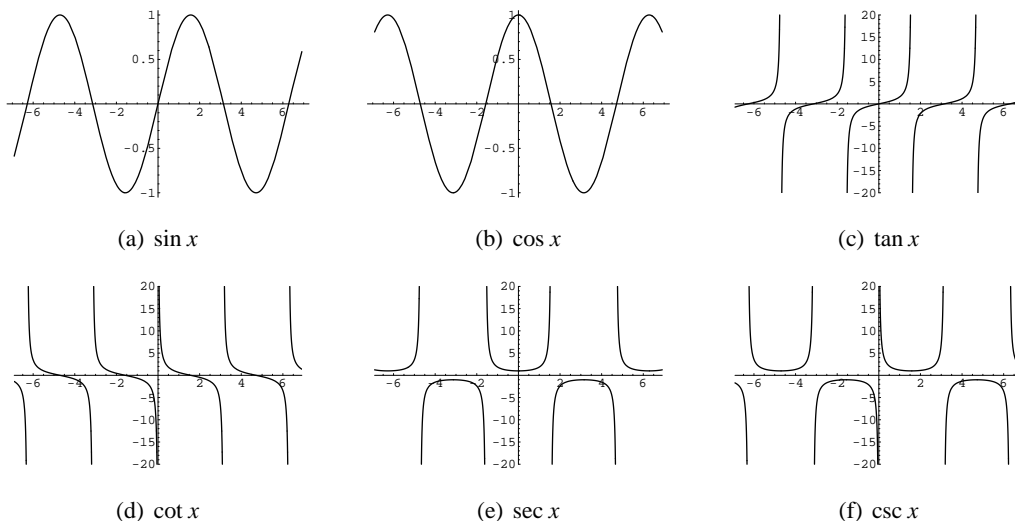


Figura 10: I grafici delle funzioni trigonometriche.

Le funzioni trigonometriche soddisfano una quantità di identità algebriche estremamente notevoli, di cui elenchiamo le più importanti.

Innanzitutto abbiamo (dal teorema di Pitagora, o – il che è la stessa cosa – dalla definizione di distanza fra due punti):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (22)$$

da cui segue immediatamente che, com'è ovvio anche dalla definizione geometrica,  $|\sin x| \leq 1$ ,  $|\cos x| \leq 1$ . Si osservi che invece di scrivere  $(\sin x)^2$  scriviamo, come è uso,  $\sin^2 x$ . È anche evidente che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari (da ovvie proprietà di simmetria del cerchio trigonometrico), così come le seguenti:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad (23a)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad (23b)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x, \quad (23c)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad (23d)$$

$$\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x, \quad (23e)$$

$$\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x, \quad (23f)$$

da cui si possono ricavare formule analoghe per le altre funzioni trigonometriche.

Vale poi il notevolissimo *teorema di addizione*:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (24a)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (24b)$$

È molto facile dimostrare il teorema di addizione. Dimostreremo infatti la formula analoga alla (24b) per il coseno della *differenza* di due angoli, dopodiché è chiaro che basta utilizzare le formule (23a)-(23f) per ottenere le (24a)-(24b).

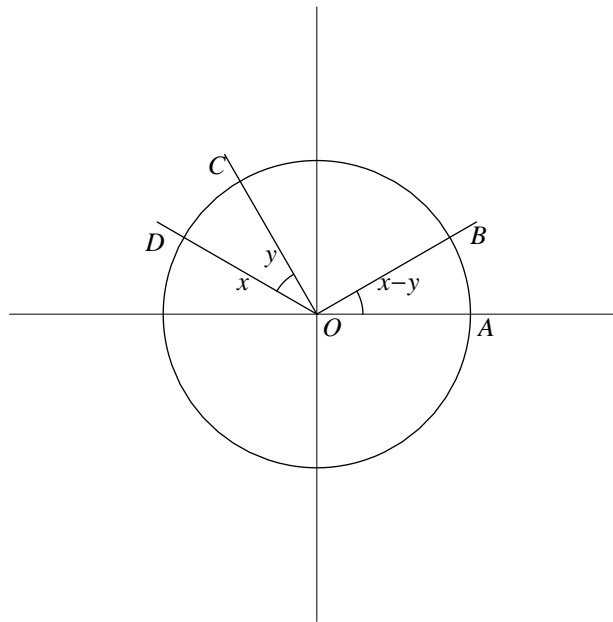


Figura 11: Costruzione per calcolare il coseno della differenza di due angoli.

Con riferimento alla figura 11, abbiamo infatti che i segmenti  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , che insistono su due angoli uguali e pari a  $x - y$ , sono uguali. Utilizzando quindi il teorema di Pitagora per calcolarne la lunghezza, abbiamo che:

$$\sqrt{(\cos(x - y) - 1)^2 + \sin^2(x - y)} = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}, \quad (25)$$

da cui svolgendo i quadrati si ricava immediatamente:

$$2 - 2 \cos(x - y) = 2 - 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y, \quad (26)$$

ovvero:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad (27)$$

da cui le formule di somma si ricavano immediatamente.

Dal teorema di addizione si ricavano immediatamente le *formule di duplicazione*:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad (28a)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \quad (28b)$$

e con un po' di sforzo si possono ricavare le formule per gli altri multipli di un angolo dato.

Dalle formule di duplicazione si ricavano le *formule di bisezione*:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad (29a)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad (29b)$$

dove bisogna scegliere il segno + o - a seconda del quadrante in cui giace  $x/2$ .

Notevoli sono anche le formule che esprimono il prodotto di seni e coseni in termini di seni e coseni delle somme algebriche degli argomenti:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (30a)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y), \quad (30b)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (30c)$$

che si ricavano immediatamente dal teorema di addizione, e da cui si ricavano a loro volta le formule seguenti, anch'esse molto utili:

$$\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2}, \quad (31a)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}, \quad (31b)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}, \quad (31c)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}. \quad (31d)$$

Consideriamo ora la funzione tangente. La funzione  $\tan x$  è definita ovunque  $\cos x \neq 0$ , cioè per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Cosa vuol dire quello che abbiamo appena scritto? vuol dire che 1.  $x$  è reale, 2.  $x$  non deve essere uguale a  $\pi/2$  più un qualsiasi multiplo intero di  $\pi$ .

Dalle (23e) ed (23f) si evince immediatamente che tale funzione è periodica di periodo  $\pi$  (infatti se mandiamo  $x$  in  $x + \pi$  sia il seno che il coseno cambiano segno, e quindi il loro quoziente non cambia). Anche per la tangente vale un teorema di addizione che si ricava immediatamente da quello per le funzioni seno e coseno:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad (32)$$

da cui:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad (33)$$

e:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{\cos x + 1}. \quad (34)$$

Consideriamo ora le funzioni trigonometriche *inverse*. Innanzitutto, le funzioni seno e coseno *non sono monotone* nel loro dominio, per cui non possiamo pensare di invertirle. Possiamo però considerare le loro *restrizioni* ad intervalli in cui esse sono monotone, ed invertire tali restrizioni. È tradizione restringere la funzione seno all'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$  in cui essa è strettamente crescente, e la funzione coseno all'intervallo  $[0, \pi]$  in cui essa è strettamente decrescente. Le inverse sono le funzioni ARCOSENO ed ARCCOSENO, indicate rispettivamente con  $\arcsin$  e  $\arccos$ , di cui riportiamo i grafici nella figura 12 seguente. Per quanto riguarda invece la tangente, essa è monotona crescente in ciascun intervallo di periodicità  $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , per cui basta sceglierne uno e invertirne la restrizione a tale intervallo; tipicamente si sceglie  $k = 0$ , cioè l'intervallo che contiene l'origine  $(-\pi/2, \pi/2)$ ; tale funzione inversa prende il nome di ARCOTANGENTE e si indica con il simbolo  $\arctan x$ ; ne riportiamo il grafico in figura 12.

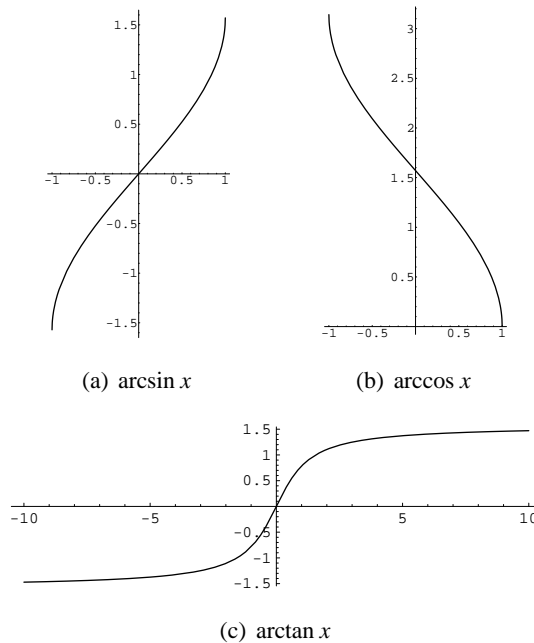


Figura 12: Grafici delle funzioni trigonometriche inverse.

È chiaro che l'arcoseno e l'arcotangente sono funzioni strettamente crescenti mentre l'arcocoseno è una funzione strettamente decrescente. Inoltre l'arcoseno e l'arcocoseno sono definite nell'intervallo  $[-1, 1]$ , mentre l'arcotangente è definita per ogni  $x$  reale; il codominio di  $\arcsin x$  è l'intervallo

$[-\pi/2, \pi/2]$ , il codominio di  $\arccos x$  è l'intervallo  $[0, \pi]$  ed il codominio di  $\arctan x$  è l'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

L'arcotangente soddisfa la seguente curiosa identità:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (35)$$

Infatti, ponendo  $x = \tan y$ , abbiamo per  $x > 0$ :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan y} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - y)}{\cos(\frac{\pi}{2} - y)} = \tan(\frac{\pi}{2} - y),$$

da cui:

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

che è la tesi. Poiché sia  $\arctan x$  che  $\arctan(1/x)$  sono funzioni dispari, segue la tesi anche nel caso  $x < 0$ .

$x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$2 - \sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2} - 1$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$1 + \sqrt{2}$
$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2 + \sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita

Tabella 1: Alcuni valori speciali delle funzioni trigonometriche.

Nella tabella 1, infine, riportiamo i valori di seno, coseno e tangente per alcuni valori speciali dell'argomento.

Una rassegna completa di trigonometria è chiaramente fuori luogo in questa sede. Si rimanda chi fosse interessato a qualsiasi libro di trigonometria.

Raccolte complete di formule trigonometriche, insieme a tante altre, si possono trovare sulle tradizionali “tavole dei logaritmi” o sul libro di trigonometria delle scuole superiori. Esistono poi libri come ad es. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, U. S. National Bureau of Standards, 1972 che contengono raccolte più che complete di tabelle e formulari per le funzioni trigonometriche e molto, molto altro. Infine sul sito <http://functions.wolfram.com/> si trova un formulario assai completo per una quantità di funzioni.

Ovviamente, l'uso di tabelle e formulari non solo non sostituisce la conoscenza diretta delle cose, ma *necessita* tale conoscenza, altrimenti non si è nemmeno in grado di cercare la formula desiderata ed interpretare le tabelle.

### 1.2.6. Altre funzioni

Quelle che abbiamo nominato sono solo *alcune* funzioni elementari che sono note ed utilizzate fin dalle scuole superiori. Introduciamo ora delle funzioni a cui vale la pena dare un nome a causa del loro frequente utilizzo, riservandoci di introdurne altre nel seguito.

La PARTE INTERA di un numero reale  $x$  è definita come:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \quad (36)$$

cioè come il più grande intero minore o uguale al reale considerato. Ad es.  $[1.5] = 1$ ,  $[3] = 3$ ,  $[-2.5] = -3$  (si raccomanda di riflettere su quest'ultimo caso!).

A volte conviene distinguere *due* tipi di funzione parte intera, la FUNZIONE PAVIMENTO e la FUNZIONE SOFFITTO:

$$[x] = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \quad (\text{funzione pavimento}), \quad (37a)$$

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\} \quad (\text{funzione soffitto}). \quad (37b)$$

In parole, la funzione pavimento è la stessa cosa della parte intera come precedentemente definita, mentre il soffitto di un reale  $x$  è il più piccolo intero maggiore o uguale al reale dato; ad es.  $\lceil 1.5 \rceil = 2$ ,  $\lceil 3 \rceil = 3$ ,  $\lceil -2.5 \rceil = -2$  (si confronti con la funzione pavimento). La funzione pavimento dunque approssima il suo argomento con il miglior intero *dal basso*, mentre la funzione soffitto approssima il suo argomento con il migliore intero *dall'alto*, da cui i nomi.

La PARTE FRAZIONARIA di un numero reale  $x$  è definita come:

$$\langle x \rangle = x - [x], \quad (38)$$

cioè il numero medesimo, meno la sua parte intera. Ovviamente la parte frazionaria di qualsiasi numero intero è nulla.

In fig. 13 vediamo i grafici di queste tre funzioni.

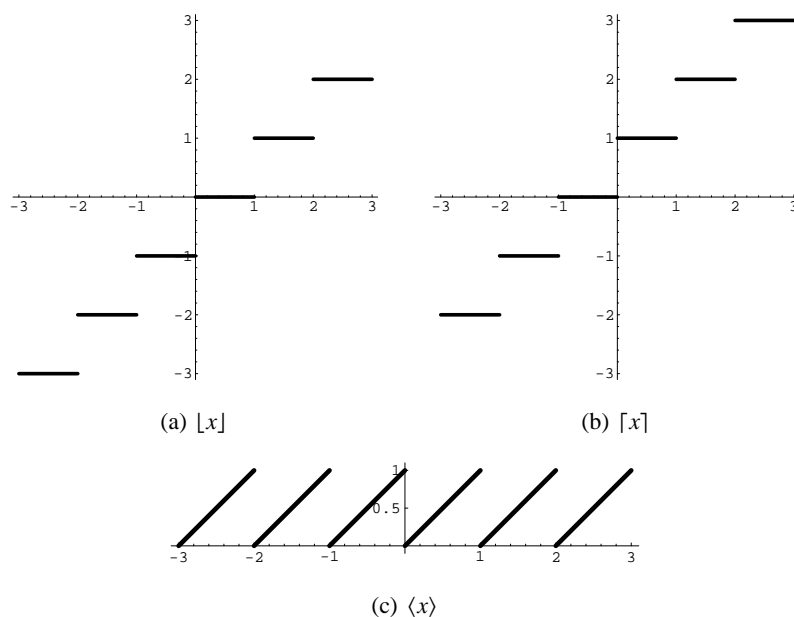


Figura 13: Funzione parte intera (o pavimento), funzione soffitto, funzione parte frazionaria.

La funzione SEGNO è definita come:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (39)$$

Non importa com'è definita la funzione segno quando il suo argomento è nullo; noi abbiamo scelto che valga 0 per semplicità, a volte viene definita come 1 o  $-1$  o addirittura non definita nell'origine.

Ricordiamo che il valore assoluto di un numero reale  $x$ , detto anche MODULO di  $x$ , è definito come:

$$|x| = \max\{x, -x\}. \quad (40)$$

Notiamo che:

$$|x| = x \text{ sign}(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (41)$$

Inoltre vale la proprietà:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (42)$$

detta *disuguaglianza triangolare*, notevolissima.

La dimostrazione della disuguaglianza triangolare è assolutamente elementare. Un modo intuitivo è il seguente: la disuguaglianza è ovvia (nel senso che vale l'uguale) se  $x$  e  $y$  hanno lo stesso segno; se  $x$  e  $y$  hanno segno opposto, i loro valori assoluti si sottraggono ottenendo quindi un numero inferiore a quello che otterremmo se li sommassimo. Un modo formale e pedante è il seguente;  $x$  e  $y$  soddisfano le disuguaglianze  $-|x| \leq x \leq |x|$ ,

$-|y| \leq y \leq |y|$  (saturando l'una o l'altra disuguaglianza a seconda che siano positivi o negativi); sommando membro a membro tali disuguaglianze otteniamo:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

che è la tesi.

Nella fig. 14 riportiamo il grafico della funzione valore assoluto.

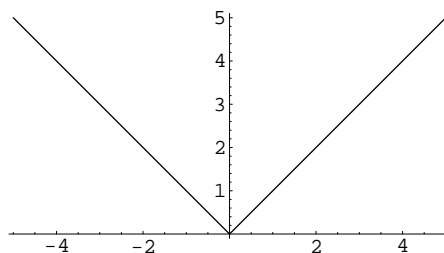


Figura 14: Grafico di  $|x|$ .

Conviene introdurre anche la FUNZIONE GRADINO O FUNZIONE DI HEAVISIDE (dal nome del fisico e matematico inglese Oliver Heaviside, 1850-1925):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Di nuovo, il valore della funzione di Heaviside in 0 è inessenziale in qualsiasi applicazione. La funzione di Heaviside viene anche indicata a volte con il simbolo  $\Theta(x)$  (cosa assai infelice perché le cosiddette “funzioni  $\vartheta$ ” sono in matematica ben altra cosa).

A partire da funzioni note, come ad es. quelle che abbiamo visto fin’ora, ne possiamo costruire altre non solo mediante operazioni elementari o mediante composizione, ma anche mediante una speciale “chirurgia” sulle funzioni, nota come DEFINIZIONE PER INTERVALLI. La funzione segno e la funzione di Heaviside ne sono degli esempi: il valore della funzione è sí definito tramite formule, ma da formule diverse a seconda dell’intervallo in cui la variabile  $x$  giace. Non c’è nulla di speciale in tali definizioni: basta solo prestare attenzione alla espressione da utilizzare nei varî intervalli.

Infine, non dimentichiamo *mai* che *qualsiasi* relazione che soddisfa la definizione di funzione data nel capitolo precedente è, appunto, una funzione. Non è detto che sia semplice, data da una formula esplicita, o nemmeno che dobbiamo conoscere un modo per calcolarla o che addirittura abbia un grafico che è possibile disegnare. Due esempi:

- Consideriamo la funzione:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (43)$$

cioè la funzione che è 0 sugli irrazionali e 1 sui razionali. È chiaro che per sapere quanto vale dobbiamo sapere se il suo argomento è razionale o meno, il che non è detto che sia banale (esistono numeri che

sono definiti da formule molto semplici di cui a tutt'oggi non si sa se siano razionali o meno). Inoltre non è possibile disegnare concretamente un grafico significativo di tale funzione: infatti un tentativo di disegnarla non potrà che dare due linee orizzontali  $y = 0$  e  $y = 1$ , su cui i punti che rappresentano la funzione sono densi.

- È noto, per ragioni che vedremo più avanti, che una equazione algebrica di quinto grado (in generale di grado dispari) ha sempre almeno una radice reale (eventualmente di più, al massimo in numero pari al grado dell'equazione). Quindi possiamo definire la funzione  $f(a)$  come la più grande radice reale ad es. dell'equazione di quinto grado  $x^5 + ax^4 + x^3 + x + 1 = 0$ . È noto però che *non esiste alcuna formula in termini di funzioni elementari per scriverla*, salvo casi particolari. Quindi una funzione come la  $f(a)$  sopra definita può essere calcolata con la precisione che vogliamo utilizzando dei metodi di calcolo numerico, ma è noto *a priori* che non esiste nessuna formula per scriverla, in termini di funzioni elementari.

### 1.2.7. Composizione di funzioni elementari

Mediante composizione di funzioni possiamo definirne quante altre ce ne pare. L'unica cosa a cui dobbiamo stare attenti che non abbiamo ancora considerato è cosa accade al dominio della funzione composta.

Infatti, quando una funzione è assegnata, in pratica, da una formula, in genere non viene specificato il dominio: si sottintende che il dominio è l'insieme dei reali per cui la formula data ha senso. Il problema diventa appunto trovare tale insieme. Ad es., se abbiamo la funzione  $h(x) = g(f(x))$ , non è detto che il dominio di  $h$  sia uguale al dominio di  $f$ , come potrebbe sembrare a prima vista: infatti preso un  $x$  nel dominio di  $f$ ,  $f(x)$  è certamente ben definito, ma potrebbe giacere *fuori dal dominio di  $g$* ! Quindi non solo  $x$  deve giacere nel dominio di  $f$ , ma i valori ottenuti di  $f(x)$  al variare di  $x$  devono essere contenuti nel dominio di  $g$ ; in questo modo è possibile che il dominio della funzione composta sia *più piccolo* del dominio della  $f$ . Facciamo un esempio.

Sia:

$$f(x) = \log_2 \arcsin x.$$

Qui la nostra funzione è composta delle due funzioni  $\arcsin$  e  $\log_2$ . La funzione  $\arcsin$  è definita per  $x$  compresi nell'intervallo  $[-1, 1]$ , ed è positiva per  $x$  nell'intervallo  $(0, 1]$ , negativa o nulla in  $[-1, 0]$ . La funzione  $\log_2$  è definita per valori strettamente positivi del suo argomento, quindi sono accettabili solo valori di  $x$  nel dominio della funzione composta tali che  $\arcsin x > 0$ . Quindi  $\text{dom}(f) = (0, 1]$ .

È chiaro che se la funzione considerata è composta da parecchie funzioni, allora può diventare delicato ricavarne il dominio.

**Esercizio 2.** Determinare il dominio della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\log_2 \arcsin x - \log_2 \frac{\pi}{4}}.$$

### 1.3. Le funzioni in geometria

Il linguaggio delle funzioni in geometria è estremamente fecondo di applicazioni. Ben lungi dal fare un corso di complementi di geometria, introduciamo in modo molto semplice ed informale alcuni concetti che ci serviranno per sostanziare quando appreso finora e comprenderne l'utilità.

#### 1.3.1. I reali come retta; il piano e lo spazio cartesiano

È noto che possiamo rappresentare i numeri reali su una retta, scegliendo un punto  $O$  qualsiasi, detto ORIGINE, su tale retta, scegliendo una unità di misura per misurare le distanze dall'origine e scegliendo una direzione sulla retta per definire la relazione d'ordine sui reali (cioè in pratica scegliendo un altro punto  $U$  ed associandolo al numero reale 1). In tal senso si parla di RETTA REALE.

Possiamo rappresentare le *coppie ordinate di numeri reali* su un piano, scegliendo un punto  $O$  qualsiasi, l'origine, e *due* rette distinte  $r_1$  e  $r_2$  passanti per  $O$ , dette ASSI COORDINATI, su ciascuna delle quali abbiamo scelto un punto  $U_1$  e  $U_2$  che definisce l'unità di misura e la scelta del verso su ciascun asse. Indi, dato un punto  $P$  qualsiasi nel piano, consideriamo le sue proiezioni  $P_1$  e  $P_2$  sugli assi  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente, condotte parallelamente agli assi. I due numeri reali che corrispondono ai punti  $P_1$  e  $P_2$  sulle due rette sono una coppia di numeri reali  $x_1$  e  $x_2$  detti COORDINATE CARTESIANE del punto  $P$  rispetto al SISTEMA DI RIFERIMENTO  $O r_1 r_2$ . Viceversa, data una coppia ordinata di numeri reali  $(x, y)$  possiamo considerare il punto  $P$  del piano che ha, rispetto ad un sistema di riferimento dato, quei numeri come coordinate cartesiane. In genere, gli assi coordinati vengono scelti perpendicolari e le unità di misura uguali su entrambe gli assi.

Una costruzione analoga può essere fatta nello spazio tridimensionale, rappresentando quindi i punti nello spazio tramite una *terna ordinata* di numeri reali, che ne esprimono le sue coordinate cartesiane in un sistema di riferimento definito da un'origine  $O$  e da *tre* assi coordinati  $r_1, r_2$  e  $r_3$  (in genere scelti perpendicolari).

#### 1.3.2. Coordinate polari, cilindriche, sferiche

Le coordinate cartesiane sono ben lungi dall'essere le uniche possibili, o le uniche utili, anzi: in genere è opportuno scegliere nello studio di un determinato problema il sistema di coordinate che meglio si adatta alle simmetrie del problema considerato.

Qui noi definiremo semplicemente tre sistemi di coordinate, uno nel piano e due nello spazio, utili in molti problemi concreti. Ulteriori nozioni si possono trovare su qualsiasi buon libro di geometria (ad es. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Geometria Contemporanea*, Vol. 1, Ed. Riuniti, 1999; si tratta comunque di un testo relativamente avanzato che presuppone alcune nozioni che studieremo solo più avanti, in particolare calcolo differenziale ed integrale per funzioni di più variabili reali ed algebra lineare).

Le COORDINATE POLARI nel piano sono definite come segue. Nel piano individuiamo un punto  $O$ , l'origine o polo, ed una semiretta  $t$  partente da  $O$ . Dato un punto  $P$ , le sue coordinate polari sono la distanza  $r$  del punto  $P$  da  $O$  e l'angolo  $\theta$  fra la semiretta  $OP$  e la semiretta  $t$  (per convenzione preso positivo nel verso antiorario).

La relazione tra coordinate cartesiane e coordinate polari è ovviamente molto semplice, se scegliamo come origine per le coordinate cartesiane quella delle coordinate polari e come asse  $x$  la retta che contiene la semiretta  $t$  (v. fig. 15). Abbiamo infatti chiaramente:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (44)$$

e le inverse:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0, \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (45)$$

L'espressione per  $\theta$  è (apparentemente!) complicata perché la funzione arcotangente è sempre compresa fra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , mentre  $\theta$  varia in tutto il cerchio trigonometrico, quindi è necessario distinguere il caso del primo e del quarto quadrante e quello del secondo e terzo quadrante (che non sono nel codominio della arcotangente!). Un attimo di riflessione ci convincerà che le formule precedenti sono corrette.

Sono evidenti i seguenti fatti:

- $r \geq 0$ ;
- se  $r = 0$  l'angolo  $\theta$  è inutile perché  $P$  è nell'origine indipendentemente dal valore di  $\theta$ ;
- l'angolo  $\theta$  può essere preso variabile ad es. in un intervallo come  $[0, 2\pi)$ , oppure  $(-\pi, \pi]$  – basta che tale intervallo sia lungo  $2\pi$ .

C'è dunque una sorta di “discontinuità” nella variabile  $\theta$ : se ad es. scegliamo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , muovendo il punto  $P$  con continuità, quando questo attraversa il semiasse  $x$  negativo  $\theta$  “salta” da  $0$  a  $2\pi$  (o viceversa); se scegliamo  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , tale salto avviene quando il punto  $P$  attraversa il semiasse  $x$  positivo. Ne segue che le coordinate polari non sono un “buon” sistema di coordinate nell'origine, perché coppie di coordinate polari distinte corrispondono al medesimo punto – l'origine –, ed in più abbiamo il problema del “taglio” nella variabile  $\theta$ , a cui occorre prestare attenzione interpretando sempre  $\theta$  come un angolo, cioè una variabile reale definita a meno di multipli interi di  $2\pi$ .

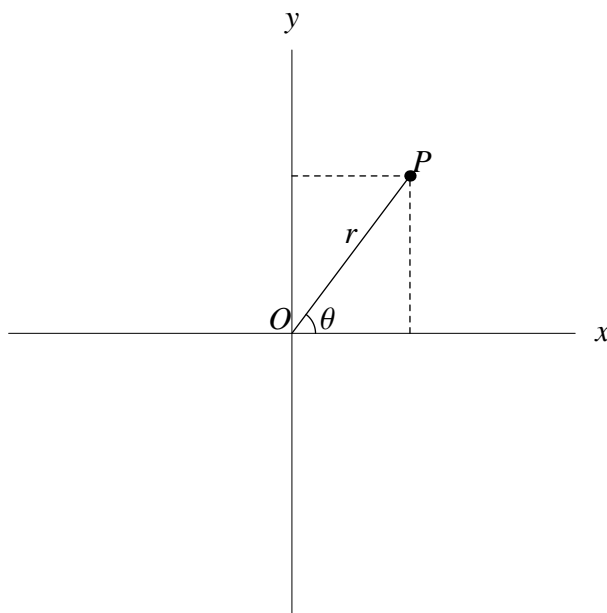


Figura 15: Coordinate polari.

**Esempio 9.** Le semirette che partono dall'origine sono rappresentate in coordinate polari dall'equazione  $\theta = \alpha$ , dove  $\alpha$  è una costante. I cerchi con centro nell'origine sono rappresentati da  $r = a$ , dove  $a > 0$  è una costante. Le rette in coordinate polari hanno per equazione  $r = p / \cos(\theta - \alpha)$ , dove  $p > 0$ ,  $\alpha$  sono costanti (qual'è il significato geometrico di  $p$  e  $\alpha$ ?). L'equazione  $r = 2a \cos \theta$  rappresenta un cerchio di centro  $(0, a)$  che passa per l'origine, mentre l'equazione generale di un cerchio è data da  $r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha) = A^2$ , dove  $c$ ,  $\alpha$  e  $A$  sono costanti.

Nello spazio ci sono due sistemi di coordinate simili alle coordinate polari del piano: le COORDINATE CILINDRICHE e le COORDINATE SFERICHE. In entrambe i casi, immaginiamo di avere nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $OXYZ$ , in cui le coordinate sono espresse da una terna di numeri reali  $(x, y, z)$ .

Le coordinate cilindriche del punto  $P$  nello spazio sono ottenute proiettando il punto  $P$  nel piano  $XY$ , ottenendo su tale piano un punto  $P'$ ; le coordinate cilindriche di  $P$  sono dunque i tre numeri  $\rho, \psi, z$ , dove  $\rho, \psi$  sono le coordinate polari di  $P'$  nel piano  $XY$  mentre la coordinata  $z$ , detta QUOTA di  $P$  per ovvî motivi, è la stessa di prima. Ne segue che la relazione fra le coordinate cilindriche e le coordinate cartesiane è data dalle formule:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi, \\ y = \rho \sin \psi, \\ z = z. \end{cases} \quad (46)$$

Le formule inverse sono praticamente identiche a quelle per le coordinate polari!

Si osservi la quantità  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  è la distanza dall'asse  $z$ , quindi l'insieme dei punti che soddisfano  $\rho = (\text{cost.})$  è un cilindro (infinito) che ha per asse l'asse  $Z$  e raggio  $\rho$ . Da ciò deriva il nome di coordinate cilindriche.

Le coordinate sferiche sono invece date dalle formule:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \cos \theta \cos \phi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases} \quad (47)$$

Le coordinate  $r, \theta, \phi$  variano rispettivamente negli intervalli  $[0, +\infty)$ ,  $[-\pi, \pi]$ , e ad es.  $[0, 2\pi)$ .

Si noti che talvolta vengono usate notazioni leggermente diverse per le coordinate sferiche, ad es.  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  sono scambiate.

Si osservi inoltre che  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , cioè  $r$  è la distanza dall'origine. Per capire l'interpretazione delle due coordinate "angolari"  $\theta, \phi$ , riflettiamo un attimo sulla loro costruzione geometrica. Poiché  $z = r \sin \theta$ , l'angolo  $\theta$  è l'angolo tra l'asse  $Z$  e la semiretta  $OP$  che parte dall'origine e passa per il punto  $P$ . Indicando come prima con  $P'$  la proiezione del punto  $P$  sul piano  $XY$ , di coordinate  $(x, y) = (r \cos \theta \sin \phi, r \cos \theta \cos \phi)$ , è evidente che le coordinate polari di  $P'$  sul piano  $XY$  sono  $r \cos \theta$  e  $\phi$ , per cui  $\phi$  è l'angolo tra l'asse  $X$  e la semiretta  $OP'$  sul piano  $XY$ . Gli intervalli di variazione delle variabili angolari seguono da queste (semplici) considerazioni geometriche. Per ragioni piuttosto ovvie, la coordinata  $\theta$  viene detta LATITUDINE e la coordinata  $\phi$  viene detta LONGITUDINE.

Ovviamente l'insieme dei punti che soddisfano  $r = (\text{cost.})$  è una sfera di raggio  $r$ , da cui il nome di coordinate sferiche.

### 1.3.3. Curve e superfici in forma esplicita, implicita, parametrica

Non è nostra intenzione qui dare definizioni rigorose di curva e di superficie, che sarebbero inevitabilmente complicate e sottili: ci accontentiamo dell'idea intuitiva di tali concetti.

Una curva nel piano può essere rappresentata analiticamente in forma **ESPLICITA**:

$$y = f(x) \quad \text{oppure} \quad x = g(y) \quad (48)$$

(nel primo caso si parla di curva rappresentata esplicitamente rispetto a  $y$  e nel secondo di curva rappresentata esplicitamente rispetto a  $x$ ), oppure in forma **IMPLICITA**:

$$F(x, y) = 0, \quad (49)$$

o infine in forma **PARAMETRICA**:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (50)$$

Si può passare dall'una all'altra forma, anche se i teoremi che garantiscono il passaggio da una forma all'altra non sono banali e verranno presi in considerazione più avanti. Nel frattempo possiamo immaginare che si possa passare da una forma all'altra perlomeno quando è possibile fare i conti esplicitamente.

**Esempio 10.** L'equazione del cerchio unitario in forma esplicita rispetto ad  $y$  è:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

(si osservi che *sono due equazioni!* una con il  $+$  ed una con il  $-$ ; ciascuna descrive *un semicerchio*: quella con il  $+$  il semicerchio superiore, quella con il  $-$  il semicerchio inferiore). In forma implicita è data da:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

ed in forma parametrica da:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

È importante rendersi conto che una stessa curva può essere rappresentata da funzioni diverse. Tanto per fare un esempio banale, tutte le equazioni del tipo:

$$(x^2 + y^2 - 1)^n = 0$$

rappresentano il cerchio unitario.

Le superfici nello spazio possono essere rappresentate, in modo analogo alle curve nel piano, in forma esplicita rispetto a ciascuna delle tre variabili (ad es. rispetto alla  $z$  come  $z = f(x, y)$ ), in forma implicita come  $F(x, y, z) = 0$ , ed in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = \phi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v). \end{cases} \quad (51)$$

Il fatto che, in forma parametrica, una superficie ha bisogno di due parametri per essere rappresentata ha ovviamente a che fare con il fatto che la superficie è un oggetto intrinsecamente bidimensionale. I parametri  $u, v$  possono essere interpretati come *coordinate locali* sulla superficie medesima.

Non ha molto senso rappresentare una curva nello spazio in forma esplicita, in quanto occorrerebbe esplicitare due variabili e la cosa non ha molto senso pratico. In forma implicita, una curva nello spazio viene rappresentata da *due* funzioni:

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \quad (52)$$

pensando quindi alla curva come all'intersezione di due superfici. In forma parametrica invece è data semplicemente da:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t). \end{cases} \quad (53)$$

Abbiamo un solo parametro perché la curva è un oggetto unidimensionale.

### 1.3.4. Curve e superfici notevoli

Descriviamo ora alcune curve e superfici famose.

**Esempio 11.** Una CONICA è una curva piana di equazione implicita:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

cioè una curva rappresentata in forma implicita da un polinomio di secondo grado nelle due variabili  $x, y$ . Il nome deriva dal fatto che una qualsiasi conica può essere ottenuta dall'intersezione di un cono con un piano. È ben lontano dai nostri scopi fare qui la teoria generale delle coniche, i cui aspetti salienti sono ben noti dal liceo e sono considerati acquisiti.

**Esempio 12.** Le curve della forma:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sono delle CUBICHE (ovvero curve rappresentate in forma implicita da un polinomio di terzo grado nelle due variabili  $x, y$ ) particolarmente famose e sono dette CURVE ELLITTICHE (anche se non hanno praticamente nulla a che fare con le ellissi, per lo meno non in modo diretto).

**Esercizio 3.** Disegnare (anche rozzamente, per punti!) i grafici qualitativi delle curve di equazione implicita:

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 - x, \\ y^2 &= x^3 + x, \\ y^2 &= x^3 + x^2. \end{aligned}$$

**Esempio 13.** Consideriamo la curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Tale curva è detta LEMNISCATA.

Osserviamo che affinché l'equazione sia possibile, deve essere  $\cos 2\theta \geq 0$ , per cui ci saranno punti appartenenti alla curva solo nei settori  $|\theta| \leq \pi/4$ ,  $|\theta - \pi| \leq \pi/4$ . Inoltre, per  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$   $r = a$ , che è il massimo valore che  $r$ , cioè la distanza di un punto sulla curva dall'origine, può avere. Inoltre, essendo il coseno una funzione pari, l'andamento della curva andando da  $\theta = 0$  verso  $\theta = \pi/4$  è il medesimo che andando da  $\theta = 0$  verso  $\theta = \pi/4$ , cioè decrescente (verso 0, che è il valore di  $\cos 2\theta$  per  $\theta = \pi/4$ ). Analogamente nel secondo e terzo quadrante. La forma implicita in coordinate cartesiane di tale curva si ricava facilmente; infatti:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \Rightarrow r^4 = r^2 a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

da cui:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

per cui la lemniscata è un'esempio di QUARTICA, cioè di curva data in forma implicita da un polinomio di quarto grado.

In fig. 16 abbiamo riportato il grafico della lemniscata con  $a = 1$ .

**Esempio 14.** Consideriamo la curva rappresentata in coordinate polari come:

$$r = 2a(1 + \cos \theta).$$

Per ricavarne l'espressione in coordinate cartesiane, facciamo i seguenti passaggi:

$$r = 2a(1 + \cos \theta) \Rightarrow r^2 = 2ar + 2ar \cos \theta,$$

da cui:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2},$$

e quindi abbiamo un'altra quartica:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Tale curva è detta CARDIOIDE a causa della sua forma, come si vede dal grafico in fig. 17.

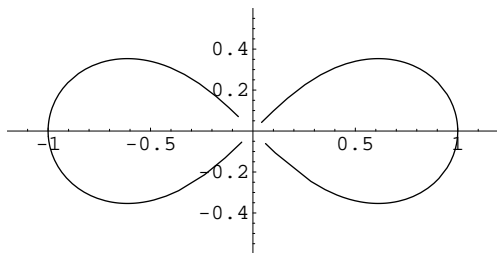


Figura 16: Lemniscata.

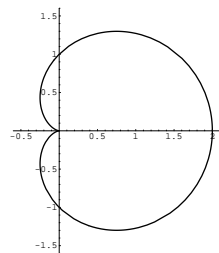


Figura 17: Cardioide.

La curva è simmetrica rispetto all'asse  $x$ , cioè non cambia se cambiamo il segno di  $y$ . Inoltre, osservando la sua espressione in coordinate polari, ci accorgiamo che  $r = 0$  per  $\theta = \pm\pi$ , e  $r$  ha il suo valore massimo ( $r = 4a$ ) per  $\theta = 0$ . Fra  $-\pi$  e  $0$   $r$  cresce monotonicamente da  $0$  a  $4a$ , e fra  $0$  e  $\pi$   $r$  decresce monotonicamente da  $4a$  a  $0$ . Inoltre siccome  $r$  è ben definita, come funzione di  $\theta$ , per ogni angolo valore del suo argomento, ne segue che lungo il lato di ogni angolo  $\theta$  incontriamo un (unico) punto della curva. Uno studio piú approfondito della curva richiede un tipo di argomenti che verrà trattato piú avanti.

**Esempio 15.** Le superfici rappresentate in forma implicita da equazioni del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

vengono dette QUADRICHE. Esempi di quadriche sono la sfera, gli ellissoidi, i paraboloidi, gli iperboloidi, i coni. Li vedremo con maggiore attenzione piú avanti.

**Esempio 16.** Un esempio di curva SGHEMBA, cioè di curva nello spazio che non è contenuta in nessun piano, è ad es. la seguente ELICA che si scrive in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tale curva ha la forma di una molla: infatti la sua proiezione sul piano  $XY$  è un cerchio di centro l'origine e raggio  $a$ , mentre la variabile  $z$ , che esprime la quota del punto che corre sulla curva, cresce proporzionalmente a  $t$ .

## 2. Successioni

Una funzione  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ , cioè dall'insieme dei numeri naturali ai reali, viene detta SUCCESIONE. È evidente che potremmo denotarle con il simbolo  $f(n)$  come si fa per qualsiasi funzione, però per ragione di comodità e di uso si preferisce indicarle con il simbolo  $f_n$ , cioè indicando l'argomento in un indice. La successione nel suo insieme, pensata come una funzione, viene indicata in genere con il simbolo  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , leggasi "l'insieme dei  $c_n$  al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ ", o brevemente  $\{c_n\}$ . Di nuovo, usiamo la lettera  $n$  per caso, potremmo usare qualsiasi altra lettera purché ci si metta d'accordo che rappresenta un intero (in genere ma certamente non sempre si usano le lettere tra  $i$  e  $n$  – le iniziali di "intero" e "numero" – per indicare i numeri interi).

Non vi è nulla di speciale, in teoria, in una funzione definita sui naturali invece che sui reali; in pratica, però, le successioni giocano un ruolo importante per cui si preferisce dargli un nome (successioni) ed una notazione loro. Inoltre, potremmo considerare anche funzioni  $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ ; per tali oggetti, che potremmo definire per

ovvie ragioni SUCCESSIONI BILATERE, la teoria non differisce granché da quella delle successioni normali per cui non le menzioneremo oltre.

## 2.1. Proprietà elementari

Le successioni sono funzioni definite su un insieme totalmente ordinato, per cui le definizioni di crescita, decrescenza, crescita e decrescenza stretta, monotonia etc. si applicano alla lettera. Ovviamente non ha senso parlare di funzione inversa di una successione, ed anche la composizione di successioni in genere non ha senso (perché le successioni sono in genere a valori in  $\mathbb{R}$ , non in  $\mathbb{N}$ , quindi comporne due non ha senso).

La cosa che piú si avvicina al concetto di funzione composta è la seguente. Se  $\{k_n\}$  è una successione *strettamente crescente* a valori in  $\mathbb{N}$ , una SOTTOSUCCESSIONE di una successione data  $\{a_n\}$  è la successione  $\{a_{k_n}\}$ , cioè la successione ottenuta prendendo, dalla successione  $\{a_n\}$ , prima il  $k_1$ -esimo elemento, poi il  $k_2$ -esimo elemento, poi il  $k_3$ -esimo, e così via.

Possiamo parlare di successioni positive o negative esattamente come per le funzioni. In caso di successioni bilatere, potremmo persino parlare di successioni pari o dispari. Infine, ha senso anche parlare di successioni periodiche, dove però il periodo deve essere un numero intero.

### 2.1.1. I simboli di sommatoria e di produttoria

Lavorando con le successioni, capiterà spesso di voler applicare una operazione elementare perlomeno ad una parte della successione, ad es. vogliamo poter scrivere in modo semplice espressioni tipo “la somma dei primi 100 elementi di una successione”, o “il prodotto degli elementi dal quindici al diciannovesimo di una successione” e cose analoghe; ovviamente potremmo usare le notazioni “con i puntini” tipo le seguenti:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100}, \quad b_5 b_6 \dots b_{19},$$

ma è evidente che si tratta di notazioni scomode ed ambigue.

Introduciamo pertanto il SIMBOLO DI SOMMATORIA  $\sum$  nel modo seguente. Con la notazione:

$$\sum_{k=n}^m a_k \tag{54}$$

intendiamo la somma di tutti i numeri  $a_k$ , al variare di  $k$  da  $n$  a  $m$ . Volendo si può anche scrivere:

$$\sum_{n \leq k \leq m} a_k.$$

Si intende che *sotto* il simbolo di sommatoria appare il valore *inferiore* che assume l'*indice di sommatoria*  $k$ , e che *sopra* il simbolo di sommatoria appare il valore *superiore* che assume l'*indice di*

sommatoria. L'indice di sommatoria viene in genere indicato sotto, insieme al valore inferiore ( $k = n$  nel caso preso ad esempio), ma se è chiaro di cosa si tratta dal contesto a volte viene anche omesso:

$$\sum_n^m a_k.$$

Si sottointende che l'indice di sommatoria ( $k$  nell'esempio) sale da  $n$  a  $m$  a passi di 1 (cioè assume di volta in volta i valori  $n, n + 1, n + 2$ , fino a  $m$ ). Se è necessario specificare un modo di procedere dell'indice di sommatoria speciale, o viene specificato a parole scrivendolo sotto il simbolo di sommatoria, o viene modificata la formula opportunamente. Ad esempio, immaginiamo che vogliamo indicare la somma di quegli elementi della successione  $\{a_k\}$  con  $k$  che varia da  $2n$  a  $2m$  e con indice  $k$  pari; possiamo dunque scrivere in uno dei due modi:

$$\sum_{\substack{2n \leq k \leq 2m, \\ k \text{ pari}}} a_k \quad \text{oppure} \quad \sum_{l=n}^m a_{2l}.$$

È assolutamente importante sottolineare che l'indice di sommatoria è quella che si chiama *variabile muta*: ha senso solo all'interno del simbolo di sommatoria medesimo, e si può utilizzare la lettera che ci pare senza che la sommatoria cambi in alcun modo. In altri termini, le due sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{100} a_k$$

sono assolutamente la stessa cosa!. Ripetiamo: **sono assolutamente la stessa cosa**. Inoltre, espressioni come la seguente **sono proibite perché non hanno senso**:

$$k \sum_{k=1}^{100} a_k \quad \leftarrow \text{Non ha senso!}$$

Infatti  $k$  varia da 1 a 100 *dentro* la sommatoria, per cui *fuori* non vuol dire nulla.

Per chi avesse un minimo di familiarità con qualche linguaggio di programmazione, il simbolo di sommatoria ha una certa relazione logica con il `for` del linguaggio C e con il `D0` del FORTRAN.

Ovviamente l'operazione che viene fatta in un simbolo di sommatoria è sempre una somma, per cui le ordinarie proprietà della somma continuano a valere. Ad es. possiamo portare fattori comuni fuori dal simbolo di sommatoria applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione (o della divisione) rispetto alla somma; ad es.:

$$\sum_{j=1}^m 3a_j = 3 \sum_{k=1}^m a_k \quad \text{oppure} \quad \sum_{l=1}^m \frac{a_l}{b} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^m a_j,$$

ma non:

$$\sum_{k=1}^m ka_k = k \sum_{k=1}^m a_k \quad \leftarrow \text{Non ha senso!}$$

(si osservi che a volte abbiamo cambiato *volutamente* il simbolo utilizzato per l'indice di sommatoria per rendere evidente come questo sia inessenziale; in pratica non si fa per evitare di confondere le idee a chi legge la formula).

Per convenzione, *la sommatoria vuota vale 0*. Ad es.:

$$\sum_{k=1}^N a_k$$

vale automaticamente 0 quando  $N < 1$ .

Mediante SIMBOLO DI PRODUTTORIA possiamo scrivere in modo compatto i prodotti invece che le somme. Ad es. con la notazione:

$$\prod_{k=n}^m a_k \quad (55)$$

intendiamo il prodotto di tutti i numeri  $a_k$ , al variare di  $k$  da  $n$  a  $m$ . Le proprietà del simbolo di produttoria sono perfettamente analoghe a quelle del simbolo di sommatoria, con l'ovvia differenza che si parla di prodotti invece che di somme; ad es.:

$$\prod_{l=1}^m 2a_l = 2^m \prod_{l=1}^m a_l,$$

in quanto ogni fattore nel prodotto contiene un fattore 2, ed avendo  $m$  fattori nella produttoria ( $l$  varia da 1 a  $m!$ ) possiamo mettere in evidenza un fattore  $2^m$ .

Per convenzione, *la produttoria vuota vale 1* (perché mentre 0 è l'elemento neutro della somma, l'elemento neutro del prodotto è 1).

## 2.2. Alcune successioni notevoli

Introduciamo ora alcune successioni particolari, che è utile conoscere per il loro frequente utilizzo nel seguito.

### 2.2.1. Successioni lineari

Una successione lineare, detta anche *PROGRESSIONE ARITMETICA*, è una successione della forma:

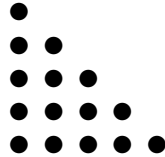
$$a_n = pn + q, \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (56)$$

È ovvio che si tratta di una successione strettamente crescente se  $p > 0$ , strettamente decrescente se  $p < 0$ , e costante se  $p = 0$ .

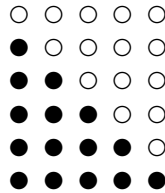
L'unica cosa che ci interessa notare, perché è occasionalmente utile, è la seguente: è *molto* facile calcolare la somma dei primi  $N$  elementi di una successione lineare. Calcoliamo infatti:

$$\sum_{j=1}^N j,$$

cioè la somma dei primi  $N$  interi. Per farlo, osserviamo che possiamo rappresentare la somma di tali numeri, rappresentando l'intero  $j$  con  $j$  palline, arrangiandoli a triangolo, come ad es. nel modo seguente per rappresentare la somma degli interi da 1 a 5:



A questo punto è chiaro che *il doppio* di tale somma può essere rappresentato nel modo seguente:



e cioè in forma di rettangolo di base  $N$  e altezza  $N + 1$  (nel caso preso ad esempio, di base 5 e di altezza 6). Per cui il numero di palline cercate sarà  $N(N + 1)/2$ , cioè la metà dell'area del rettangolo ( $15 = (5 \cdot 6)/2$  nell'esempio considerato). Questa formula fu trovata dal matematico tedesco Carl Gauss (1777-1855) quando a sette anni gli fu assegnato per punizione dal maestro di calcolare la somma di tutti gli interi da 1 a 100.

### 2.2.2.

Non è difficile, con un po' di fantasia, capire come trovare la somma della potenza  $k$ -esima dei primi  $N$  interi. Ovviamente il metodo inventato dal giovane Gauss non funziona. Però possiamo osservare che *la somma delle potenze 0-esime dei primi  $N$  interi*, cioè la somma di  $N$  volte 1, è  $N$ , cioè una espressione lineare – di grado 1 – in  $N$ , mentre *la somma delle potenze prime dei primi  $N$  interi*, che abbiamo appena calcolato, è pari a  $(N^2 + N)/2$ , cioè un polinomio di grado 2 in  $N$ . È facile congetturare che la somma delle potenze  $k$ -esime dei primi  $N$  interi sia dunque un polinomio nella variabile intera  $N$  di grado  $k + 1$ . Ad es. congetturiamo che la somma dei quadrati dei primi  $N$  interi sia:

$$\sum_{j=1}^N j^2 = a + bN + cN^2 + dN^3.$$

Resta da trovare le costanti  $a, b, c, d$ . Queste possono essere trovate facilmente ponendo  $N = 0, 1, 2, 3$  a turno nella formula precedente, e ricavando delle identità per le incognite  $a, b, c, d$ . Infatti otteniamo facilmente:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b + c + d = 1, \\ 2b + 4c + 8d = 5, \\ 3b + 9c + 27d = 14, \end{cases}$$

e cioè un semplice sistema di equazioni lineari che, risolto, dà i seguenti valori:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{6}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{3},$$

e quindi la somma dei quadrati dei primi  $N$  interi sarebbe:

$$\sum_{j=1}^N j^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}. \quad (57)$$

Si può controllare a mano qualche altro caso e verificare che effettivamente la formula *sembra* essere quella giusta: *ma non è ancora stata dimostrata!* Una dimostrazione – ora che siamo sostanzialmente convinti che la formula trovata è quella giusta – può però facilmente essere ottenuta per induzione. Infatti, Si verifica immediatamente che:

- La formula è giusta per  $N = 1$ , infatti la formula dà il risultato giusto, che è, banalmente, 1.
- Assunto che la formula sia vera per il valore  $N$ , allora è immediato verificare che vale anche per il valore  $N + 1$ :

$$\frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} + (N + 1)^2 = \frac{2(N + 1)^3 + 3(N + 1)^2 + (N + 1)}{6},$$

come un semplice calcolo dimostra.

Quindi la formula è dimostrata, per il principio di induzione matematica.

In effetti è possibile ricavare anche la (57) mediante un argomento geometrico simile a quello di Gauss, ma più complesso. Si veda ad es. qui <http://bit.ly/ptOuc4>.

Analogamente, ma con maggior sforzo, si possono trovare le altre somme di potenze degli interi.

Un fatto estremamente curioso è che il quadrato della somma degli interi da 1 a  $n$  è esattamente uguale alla somma dei cubi degli interi da 1 a  $n$  per ogni  $n$ .

### 2.2.3. Progressione geometrica

Una successione del tipo:

$$c_n = ar^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

viene detta **PROGRESSIONE GEOMETRICA**. È facile calcolare la somma dei termini con  $n$  che varia da 0 ad  $N$  (i primi  $N + 1$ ) di una progressione geometrica (ed è evidente che a tale scopo possiamo prendere  $a = 1!$ ). Infatti, sia:

$$S_N = \sum_{j=0}^N r^j.$$

Ne segue:

$$S_{N+1} = S_N + r^{N+1} = rS_N + 1,$$

cosa di cui ci si può convincere con un semplicissimo calcolo. Quindi:

$$(1 - r)S_N = 1 - r^{N+1},$$

da cui:

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}, \quad (59)$$

che è peraltro una regola ben nota di fattorizzazione dei polinomi.

#### 2.2.4.

Consideriamo la seguente successione:

$$c_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad (60)$$

il cui  $n$ -esimo termine è quindi la somma dei reciproci degli interi da 1 a  $n$ .

Si tratta evidentemente di una successione positiva. Inoltre, è anche una successione crescente: infatti ciascun termine è ottenuto dal precedente *aggiungendo una quantità positiva*, per cui è ovviamente maggiore.

Si tratta inoltre di una successione *illimitata*, cioè tale che i suoi termini possono assumere valori arbitrariamente grandi. Consideriamo infatti termini della forma  $c_{2^k-1}$ , cioè le somme dei reciproci dei primi  $2^k - 1$  termini; ad es. per  $K = 4$  consideriamo  $c_{15}$ :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}. \quad (61)$$

Possiamo raggruppare i termini della somma in blocchi di lunghezza crescente, pari alle successive potenze di 2 (prima un blocco lungo 1, poi un blocco lungo 2, poi un blocco lungo 4, etc.); ad es. nel caso di  $c_{15}$  abbiamo quattro blocchi lunghi 1, 2, 4 e 8:

$$\underbrace{1}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}}_{>\frac{1}{2}}; \quad (62)$$

è dunque evidente che ad es.  $c_{15} > 4 \cdot (1/2) = 2$ , ma se la logica che soggiace al raggruppamento dei termini nella somma è chiara, è evidente che:

$$c_{2^k-1} > k \cdot \frac{1}{2}, \quad (63)$$

e quindi la successione è illimitata (basta prendere  $K$  sufficientemente grande). *Nota bene*: abbiamo dimostrato che i termini della forma  $c_{2^k-1}$  sono illimitati; ma se una successione possiede una sottosuccessione illimitata, è evidente che è anch'essa illimitata. *Ripetiamo*: se la successione  $c_n$  è limitata, vuol dire che:

$$\forall n |c_n| < L, \quad (64)$$

per qualche  $L > 0$ ; ma se la successione contiene una sottosuccessione illimitata, ciò vuol dire che su *alcuni* elementi la stima nella (64) è violata, e ciò è sufficiente per dire che la (64) è falsa.

### 2.2.5. La disuguaglianza aritmetico-geometrica

Dati  $n$  numeri positivi  $x_1, \dots, x_n$ , definiamo la loro MEDIA ARITMETICA come:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (65)$$

e la loro MEDIA GEOMETRICA come:

$$\gamma = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}. \quad (66)$$

Vale allora la disuguaglianza:

$$\gamma \leq \mu, \quad (67)$$

detta appunto disuguaglianza aritmetico-geometrica. Si parla di “medie” perché, come è banale dimostrare, sia  $\mu$  che  $\gamma$  sono compresi fra il piú grande ed il piú piccolo dei valori degli  $x_i$ .

La dimostrazione è molto semplice, ma istruttiva. Si noti tra l'altro che nel caso  $n = 2$  si tratta di qualcosa di ovvio (basta porre  $x_1 = a^2$ ,  $x_2 = b^2$ , cosa sempre possibile visto che si tratta di numeri positivi, e poi considerare la disuguaglianza  $(a - b)^2 \geq 0$ ).

Sia infatti  $x_j = \max_i x_i$  il piú grande degli  $x_i$  e  $x_k = \min_i x_i$  il piú piccolo degli  $x_i$  (se ce ne sono piú di uno con lo stesso valore ne prendiamo uno qualsiasi, ad es. quello con indice maggiore). Chiaramente  $x_k \leq \gamma \leq x_j$ . Sostituiamo ora  $x'_j$  a  $x_j$  e  $x'_k$  a  $x_k$ , dove:

$$x'_j = \gamma, \quad x'_k = \frac{x_j x_k}{\gamma}.$$

Chiaramente la media geometrica  $\gamma'$  degli  $x$  cosí modificati non cambia, mentre cambia la media aritmetica; infatti, poich :

$$x'_j + x'_k - x_j - x_k = \frac{(x_j - \gamma)(x_k - \gamma)}{\gamma} \leq 0,$$

perch   $x_k \leq \gamma \leq x_j$ , e quindi  $\mu' \leq \mu$ . Quindi  $\gamma = \gamma'$ ,  $\mu \geq \mu'$ .

Ora, il gioco si pu  ripetere di nuovo, per ottenere nuovi  $x$ , una nuova media geometrica  $\gamma''$  ed una nuova media aritmetica  $\mu''$ , e naturalmente ragionando come sopra otteniamo:

$$\gamma = \gamma' = \gamma'', \quad \mu \geq \mu' \geq \mu''.$$

Ripetendo l'argomento *al massimo*  $n - 1$  volte, ci riconduciamo al caso in cui *tutti gli  $x$  sono oramai uguali*, ed uguali precisamente a  $\gamma$ , per cui le loro medie aritmetiche e geometriche coincidono (con  $\gamma$ ) ed inoltre abbiamo ottenuto:

$$\gamma = \dots = \gamma^{n-1} = \mu^{n-1} \leq \mu^{n-2} \leq \dots \leq \mu,$$

da cui la tesi.

### 2.3. Il fattoriale

Definiamo il FATTORIALE di un numero naturale  $n$ , indicato con  $n!$ , come:

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{j=1}^n j. \end{cases} \quad (68)$$

In parole, il fattoriale di  $n$  è il prodotto di tutti i naturali (0 escluso ovviamente!) minori o uguali ad  $n$ . Per convenzione  $0!$  è 1 (ricordiamoci che per convenzione la produttoria vuota è 1).

Il fattoriale cresce molto velocemente con  $n$ . Ad es.,  $100!$  è un numero di 158 cifre decimali, e  $1000!$  è un numero di 2568 cifre decimali. Pú avanti, quando avremo un modo *quantitativo* per misurare quanto velocemente una funzione cresce, troveremo anche il modo di quantificare un po' meglio la crescita del fattoriale.

Nelle espressioni con il fattoriale bisogna stare attenti alle semplificazioni. Infatti ad es.:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n, \quad \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1), \quad \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

e cosí via.

#### 2.3.1. Il doppio fattoriale

Talvolta è utile introdurre il DOPPIO FATTORIALE definito come segue:

$$\begin{cases} (2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2, \\ (2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1, \end{cases} \quad (69)$$

e cioè per  $n$  pari, il prodotto di tutti i pari minori o uguali ad  $n$ , e per  $n$  dispari, il prodotto di tutti i dispari minori o uguali ad  $n$ .

Ovviamente:

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (70a)$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{2^n}. \quad (70b)$$

#### 2.3.2. I coefficienti binomiali e la formula del binomio di Newton

Si chiama COEFFICIENTE BINOMIALE  $\binom{n}{k}$  (leggasi “ $n$  su  $k$ ”) la seguente espressione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (71)$$

ovviamente definito per  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ . I coefficienti binomiali soddisfano le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad (72a)$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad (72b)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (72c)$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \quad (72d)$$

L'unica non banale è la (72d), che comunque può essere verificata mediante un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{((k-1)!(n-k)!)} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

La (72d), riflettendoci sopra un attimo, è la proprietà che permette di calcolare i coefficienti binomiali per mezzo del famoso *triangolo di Pascal-Tartaglia* che si studia alle scuole superiori.

I coefficienti binomiali sono utili perchè permettono di dimostrare la seguente formula, detta SVILUPPO BINOMIALE, che permette di espandere la potenza  $n$ -esima di un binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (73)$$

Tale formula può facilmente essere dimostrata per induzione utilizzando la (72d). Infatti, innanzitutto la (73) è banalmente vera per  $n=1$ : infatti in tal caso tale formula ci dice che  $(a+b)^1 = a+b$ , il che è ovvio. Quindi, è sufficiente dimostrare che, assumendola vera nel caso  $n-1$ , è vera per  $n$  per averne dimostrata la validità per ogni  $n$ . Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \right) (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n = \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n = \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) a^k b^{n-k} + b^n = \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.

Questi passaggi sono veramente semplici: si tratta solo di leggere le formule chiedendosi ad ogni passaggio cosa è successo, e di ricordarsi che viene fatto uso della (72d) in un punto cruciale, e cioè nel settimo passaggio. La comprensione di tale dimostrazione è una buona verifica della familiarità con il simbolo di sommatoria.

La (73) ci permette di dimostrare un'altra proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad (74)$$

Basta infatti porre  $a = b = 1$  nella (73) per ottenere la (74).

Sono definite moltissime altre funzioni aritmetiche, spesso apparentemente interessanti solo per chi si occupa di argomenti astratte come l'algebra e la teoria dei numeri. In realtà, man mano che l'algebra e la teoria dei numeri sono diventate discipline di interesse pratico a causa delle loro applicazioni in crittografia, molte funzioni della teoria dei numeri hanno acquistato interesse pratico. Si rimanda comunque ad un corso di algebra o di matematica discreta per ogni approfondimento.