

# Note del Corso di Analisi Matematica 1\*

Alberto Berretti

## Parte III.

### I numeri complessi

Introduciamo ora una importante estensione dei numeri reali, che ci permetterà ad es. di calcolare le radici quadrate – ed in generale di esponente pari – di qualsiasi numero, anche quelli negativi, e più in generale che permetterà di trovare le radici di *qualsiasi* equazione algebrica. In altri termini, mentre se restiamo nei numeri reali esistono delle equazioni algebriche che non hanno soluzione (ad es.  $x^2 + 1 = 0$ ), nei complessi *ogni equazione algebrica ha almeno una soluzione*. I numeri complessi sono inoltre molto utili per rappresentare le rotazioni nel piano, e come tali sono importanti in tutte quelle applicazioni in cui occorre rappresentare matematicamente fenomeni ondulatori in cui il concetto di “fase” gioca un ruolo importante.

#### 1. Il piano complesso

Definiamo ora i numeri complessi come punti nel piano sui quali le usuali operazioni algebriche sono definite in modo opportuno.

Si osservi che nei corsi di matematica elementari (ad es. al liceo scientifico o all’istituto tecnico) è abitudine introdurre i numeri complessi dicendo “la radice di  $-1$  che prima non esisteva ora è  $i$ ”. Questo però è un modo puramente intuitivo di procedere che non soddisfa le esigenze di rigore anche più elementari. Perché allora non dire “ $1/0$  prima non esisteva ed ora è <inserire simbolo a caso>”?

---

\*Quest’opera è distribuita con licenza “Creative Commons - Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0 Italia (CC BY-NC-ND 3.0)” (v. <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/it/deed.it>). Ringrazio il Prof. Roberto Zanasi (<http://prooof.blogspot.com/>) per molti utili suggerimenti volti a migliorare la qualità di questo testo.

Ogni oggetto matematico deve essere costruito a partire da qualcosa di preesistente per poter essere definito.

## 1.1. Definizione ed operazioni

### 1.1.1. I numeri complessi come punti nel piano

Un NUMERO COMPLESSO è semplicemente una coppia ordinata di numeri reali:

$$(a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ci si può chiedere a che possa servire una tale definizione. La risposta a questa domanda è nei paragrafi seguenti, in cui definiamo le principali operazioni algebriche sui numeri complessi ed introduciamo una notazione speciale che ne rende la manipolazione particolarmente agevole ed intuitiva.

L'insieme dei numeri complessi (e cioè l'insieme  $\mathbb{R}^2$  delle coppie ordinate di numeri reali dotato delle operazioni che andiamo a definire nel seguito) viene usualmente denotato con il simbolo  $\mathbb{C}$ .

### 1.1.2. Somma e sottrazione di numeri complessi

Definiamo la somma di due numeri complessi  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  come la loro somma vettoriale:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \quad (2)$$

È evidente che la somma così definita soddisfa tutte le ordinarie proprietà della somma, e cioè è commutativa ed associativa, ed il numero complesso  $(0, 0)$  ne è l'elemento neutro.

L'opposto di  $z = (x, y)$  è definito nel modo ovvio come:

$$-z = (-x, -y), \quad (3)$$

e soddisfa tutte le proprietà che ci aspettiamo dall'opposto di un numero, ad es.  $z + (-z) = 0$ .

La differenza di due numeri complessi viene definita quindi come la somma del primo con l'opposto del secondo, e quindi, con le notazioni usate nella (2):

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (4)$$

Trattandosi essenzialmente di una *somma vettoriale*, se rappresentiamo i numeri complessi come punti nel piano, la loro somma viene ottenuta con la ben nota *regola del parallelogramma*, illustrata in fig. 1.

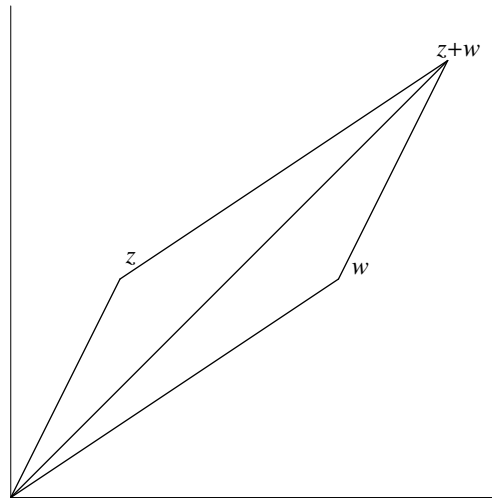


Figura 1: Somma di numeri complessi

### 1.1.3. Moltiplicazione di numeri complessi

Ovviamente è sempre possibile moltiplicare un numero complesso con un numero reale:

$$\lambda \in \mathbb{R}, z = (x, y) \in \mathbb{C} : \quad \lambda z = (\lambda x, \lambda y). \quad (5)$$

Tale operazione soddisfa tutto quello che ci aspettiamo da una moltiplicazione, eccetto che resta una moltiplicazione tra reali e complessi, mentre noi vogliamo definire una operazione di moltiplicazione *fra complessi*, e che inoltre *soddisfi tutte le proprietà della ordinaria moltiplicazione fra numeri reali*.

È facile rendersi conto che la cosa apparentemente ovvia, e cioè la moltiplicazione componente per componente, non è una buona idea; infatti non sarebbe difficile verificare che non sarebbero mantenute tutte le ordinarie proprietà della moltiplicazione, ed inoltre sarebbe una definizione “stupida”, in quanto a questo punto non si capisce a cosa servirebbero le due componenti di un numero complesso se esse non si “mescolano” mai mediante una qualche operazione importante.

La corretta definizione di moltiplicazione fra numeri complessi è apparentemente curiosa ed originale, e ci convinceremo che è quella buona solo più avanti, quando ne avremo compreso tutte le proprietà. Ponendo dunque  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ , definiamo:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (6)$$

Bisogna verificare che tale operazione soddisfa (i) la proprietà commutativa  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ , (ii) la proprietà associativa  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ , (iii) la proprietà distributiva rispetto alla somma  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ .

La proprietà commutativa è però ovvia se notiamo che possiamo scambiare gli indici 1 e 2 nella (6) senza che la formula cambi. La verifica delle proprietà associativa e distributiva è un esercizio

estremamente noioso e sostanzialmente banale. È anche immediato verificare che il numero complesso  $(1, 0)$  è l'elemento neutro per la moltiplicazione così definita, e che la moltiplicazione di qualsiasi numero complesso per  $(0, 0)$  dà  $(0, 0)$ . Pertanto possiamo chiamare  $(0, 0)$  lo ZERO COMPLESSO e  $(1, 0)$  la UNITÀ COMPLESSA. Inoltre, e ciò è essenziale, se identifichiamo il numero reale  $\lambda$  con il numero complesso  $(\lambda, 0)$  allora la moltiplicazione tra numeri reali e la moltiplicazione di un numero complesso per uno reale come definita in (5) coincide con la moltiplicazione fra complessi:

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad & (\lambda, 0) \cdot (\mu, 0) = (\lambda\mu, 0), \\ \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} : \quad & (\lambda, 0) \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y) \end{aligned}$$

(l'analogia proprietà per la somma è ovvia). Ciò vuol dire che possiamo identificare i numeri reali con i numeri complessi della forma  $(x, 0)$ , e le operazioni sui complessi possono essere interpretate come generalizzazione delle corrispondenti operazioni sui reali.

#### 1.1.4. Il numero $i$

Cosa sono “gli altri” numeri, cioè quelli che non corrispondono ai reali? Che proprietà hanno? Cominciamo col calcolare il seguente semplice prodotto:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0). \quad (7)$$

In altri termini,  $(0, 1)$  è quel numero complesso che, moltiplicato per se stesso, dà il reale  $-1$  (ovvero il numero complesso che corrisponde al reale  $-1$ : ma *d'ora in poi identificheremo i reali con i complessi che gli corrispondono*). Dunque nei complessi, il quadrato di un numero può essere un reale negativo e quindi l'introduzione dei numeri complessi ci permette di calcolare le radici quadrate dei numeri negativi. In realtà i numeri complessi fanno molto di più, e cioè nei complessi è vero che qualsiasi equazione algebrica ammette almeno una soluzione, cosa che non è vera nei reali, e che non è totalmente banale da dimostrare; si dice pertanto che i complessi sono un *completamento algebrico* dei reali.

A questo punto è estremamente conveniente utilizzare la seguente notazione: scriviamo direttamente tutti i numeri complessi della forma  $(x, 0)$  come il numero reale  $x$  corrispondente, e denotiamo il numero  $(0, 1)$  con il simbolo  $i$ ; numero complesso  $(x, y)$  può allora essere scritto come  $x + iy$ , e tutte le proprietà delle operazioni elementari sui numeri complessi si ricavano dalle corrispondenti proprietà delle operazioni elementari sui reali e dalla proprietà (7), cioè, con la nuova notazione,  $i^2 = -1$ . Si osservi che, com'è ovvio, anche  $(-i)^2 = -1$ .

**Esercizio.** Calcolare le seguenti operazioni fra numeri complessi:

- $(1 + i)(1 - i)$ ,
- $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$ ,

- $(2 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - 2i)$ ,
- $(\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)$ .

### 1.1.5. Potenze di numeri complessi

Non vi è nulla di speciale nella definizione di potenza *di esponente intero positivo* di un numero complesso: semplicemente si tratta di una moltiplicazione ripetuta, come per i numeri reali.

**Esercizio.** Calcolare le seguenti potenze di numeri complessi:

- $i^n$ , per  $n \in \mathbb{N}$ ; che proprietà ha la successione  $\{i^n\}$ ?
- $(1 + i)^2$ ,
- $(1 + i)^4$ ,
- $(1 + \sqrt{2}i)^3$ ,
- $(\cos x + i \sin x)^2$ .

### 1.1.6. Parte reale, parte immaginaria, complesso coniugato, modulo ed argomento

Definiamo ora alcune particolari operazioni particolari definite sui numeri complessi.

Dato un numero complesso  $z = x + iy$ , definiamo la sua **PARTE REALE**  $\operatorname{Re} z$  come il numero reale  $x$ , la sua **PARTE IMMAGINARIA**  $\operatorname{Im} z$  come il numero *reale*  $y$ , per cui  $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ . Definiamo dunque il **COMPLESSO CONIUGATO**  $\bar{z}$  (indicato a volte con  $z^*$ ) come  $\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ , cioè il numero complesso con la stessa parte reale e parte immaginaria opposta). Se il numero  $z$  è reale, allora  $\operatorname{Re} z = z$ ,  $\operatorname{Im} z = 0$ , e  $\bar{z} = z$ . Se il numero  $z$  ha parte reale nulla si dice che è **IMMAGINARIO O**, per chiarezza, **IMMAGINARIO PURO**; in tal caso  $i \operatorname{Im} z = z$  e  $\bar{z} = -z$ . Si noti che in un numero reale non vi è nulla di più reale che in un numero immaginario e viceversa; la terminologia ha origini storiche.

Il **MODULO O VALORE ASSOLUTO**  $|z|$  è definito come:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \quad (8)$$

e quindi non è altro che la distanza del punto che rappresenta il numero complesso  $z$  nel piano complesso dall'origine. Si osservi che, se  $z$  è reale, allora la definizione di modulo data dalla (8) equivale a quella data precedentemente per i numeri reali, in quanto  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Si osservi inoltre che:

$$z\bar{z} = |z|^2. \quad (9)$$

Il valore assoluto così definito soddisfa le seguenti proprietà:

$$|z| \geq 0, \quad (10a)$$

$$|z| = 0 \Rightarrow z = 0, \quad (10b)$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (10c)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (10d)$$

La (10a) è ovvia. La (10b) è anche essa ovvia in quanto se  $|z| = 0$  allora la somma dei quadrati delle parti reali ed immaginarie di  $z$  è nulla, e ciò è possibile solo se sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria sono nulle. La (10c) deriva da un calcolo diretto; infatti ponendo  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  abbiamo:

$$\sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

da cui, elevando al quadrato ambo i membri, otteniamo:

$$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2),$$

e svolgendo i quadrati otteniamo un'identità. Ovviamente la (10c) si può iterare per cui abbiamo:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|.$$

Infine la (10d), che è di nuovo la *disuguaglianza triangolare*, va dimostrata in modo diverso che in  $\mathbb{R}$ . Notiamo innanzitutto che, come è ovvio dalla definizione di valore assoluto, abbiamo:

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

Quindi, grazie alla (9), abbiamo:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

Dalle ultime due segue dunque che:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2|,$$

e quindi la disuguaglianza triangolare.

È immediato, e lasciato per esercizio, verificare che allo stesso modo si ottiene:

$$|z_1 - z_2|^2 \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2|,$$

da cui la non meno utile disuguaglianza:

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

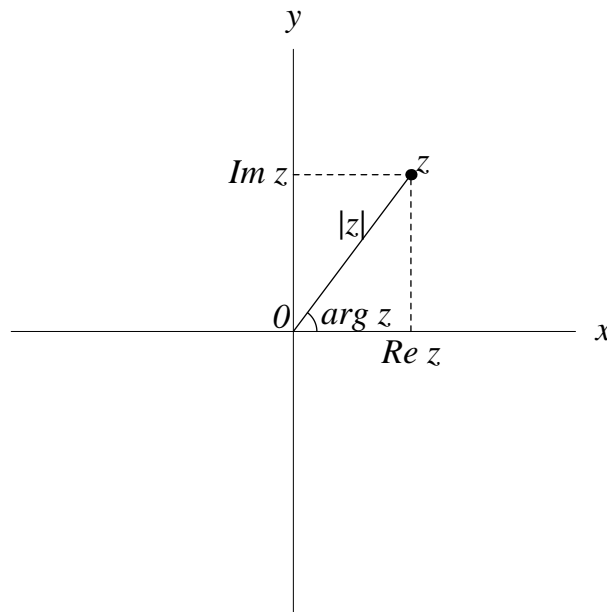


Figura 2: Parte reale, parte immaginaria, modulo ed argomento di un numero complesso

Infine definiamo l'ARGOMENTO di un numero complesso  $z$ , indicato con  $\arg z$ , come l'angolo tra la semiretta congiungente l'origine con il punto che rappresenta  $z$  sul piano complesso ed il semiasse delle  $x$  positive. In altri termini, vale la formula:

$$\begin{cases} \arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} & \text{se } \operatorname{Re} z > 0, \\ \arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \pi & \text{se } \operatorname{Re} z < 0, \\ \arg z = \frac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0, \\ \arg z = -\frac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (11)$$

**Osservazione importante:** l'argomento di un numero complesso è un angolo, ovvero è definito a meno di multipli di  $2\pi$ . In altri termini,  $\arg z$  non ha un valore definito, ma ne ha infiniti, che differiscono per multipli di  $2\pi$ ; quindi a rigore  $\arg z$  non è una funzione di  $z$ . Se restiamo in un contesto di angoli, possiamo manipolare tranquillamente  $\arg z$  come se fosse una funzione, come abbiamo fatto nella (11), in cui si intende che  $\arg z$  è definito come il membro destro delle varie uguaglianze, a meno di multipli di  $2\pi$ . Se si vuole una autentica funzione di  $z$ , occorre restringere l'insieme di valori in cui l'argomento può variare, ad es. all'intervallo  $[0, 2\pi)$ ; in tal caso è conveniente utilizzare un altro simbolo per la funzione così ottenuta, ad es.  $\operatorname{Arg} z$  con la maiuscola.

In fig. 2 rappresentiamo graficamente le operazioni introdotte in questo paragrafo.

### 1.1.7. Divisione di numeri complessi

La divisione di un numero complesso per un numero reale è calcolata nel modo naturale:

$$\lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} : \frac{z}{\lambda} = \frac{\operatorname{Re} z}{\lambda} + i \frac{\operatorname{Im} z}{\lambda}, \quad (12)$$

ovvero dividiamo parte reale e parte immaginaria di  $z$  separatamente per il reale  $\lambda$ . Ma come procedere se dobbiamo dividere un complesso per un altro complesso? Ovviamente *non* siamo liberi di prendere una definizione qualsiasi, perché la divisione deve essere l'operazione inversa della moltiplicazione che è già stata definita. Quindi dobbiamo usare in modo intelligente quanto sappiamo dell'algebra dei numeri complessi. Approfitando della (12), ci riconduciamo a tale caso nel modo seguente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (13)$$

che si calcola come in (12) in quanto il denominatore è reale.

Si osservi che la procedura è formalmente analoga a quella nota come “razionalizzazione del denominatore” in una frazione. Ad es., se abbiamo:

$$\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$$

e vogliamo eliminare il termine irrazionale al denominatore, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il fattore “algebricamente coniugato”  $3 - \sqrt{2}$  in modo da ottenere a denominatore una espressione priva del radicale  $\sqrt{2}$ .

In realtà l'analogia non è solo formale e c'è sotto qualcosa di importante relativo a quel ramo della matematica noto come *teoria dei numeri*.

**Esercizio.** Calcolare i seguenti quozienti:

- $\frac{1-i}{1+i}$ ,
- $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$ ,
- $\frac{(1+i)^3}{1-i}$ ,
- $\frac{1}{z}$ ,
- $\frac{1}{\cos x + i \sin x}$ ,
- $\frac{(\cos x - i \sin x)^2}{\cos 2x + i \sin 2x}$ .

## 1.2. Il diagramma di Argand ed le formule di De Moivre

È chiaro che il modulo e l'argomento di un numero complesso sono le *coordinate polari* del punto che lo rappresenta nel piano complesso. L'interpretazione geometrica che ne consegue dei numeri complessi prende tradizionalmente il nome di diagramma di Argand (dal nome di Jean Robert Argand, 1768-1822, ragioniere svizzero e matematico dilettante, che la introdusse).

### 1.2.1. Rappresentazione polare dei numeri complessi

Ponendo dunque:

$$\begin{cases} \rho = |z|, \\ \phi = \arg z, \end{cases} \quad (14)$$

abbiamo che  $(\rho, \phi)$  sono le coordinate polari del punto che rappresenta il numero complesso  $z$  sul piano complesso. Dunque:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \rho \cos \phi, \\ \operatorname{Im} z = \rho \sin \phi. \end{cases} \quad (15)$$

Altri modi per dire la medesima cosa sono:

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z). \quad (16)$$

### 1.2.2. Interpretazione geometrica delle operazioni sui numeri complessi

È a questo punto interessante capire se le operazioni sui numeri complessi hanno un significato geometrico.

La somma è stata già discussa: trattandosi della normale somma vettoriale, può essere interpretata in termini della nota "regola del parallelogramma".

È interessante invece discutere l'interpretazione geometrica del *prodotto* di numeri complessi. Sia dunque:

$$z_1 = \rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2). \quad (17)$$

Allora:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_2 \sin \phi_1)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)), \end{aligned} \quad (18)$$

da cui ricaviamo che 1. il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli (cosa già vista in precedenza), 2. *l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti*. Quest'ultimo è un fatto importante per cui lo riproponiamo esplicitamente:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (19)$$

Ciò vuol dire che la moltiplicazione per un numero complesso  $z$  di modulo  $\rho = |z|$  ed argomento  $\phi = \arg z$  equivale ad una rotazione di un angolo  $\phi$ , e ad un riscaldamento omogeneo di un fattore  $\rho$  (una dilatazione se  $\rho > 1$ , una contrazione se  $\rho < 1$ ). In particolare, i numeri complessi di modulo 1 (e quindi della forma  $\cos \phi + i \sin \phi$ ) corrispondono a rotazioni (di un angolo  $\phi$ ) intorno all'origine del piano complesso.

Applichiamo ora quanto detto alle potenze di  $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ . Dalla (18), ponendo  $z_1 = z_2 = z$ , abbiamo:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi); \quad (20)$$

è altresì evidente che possiamo continuare ad iterare l'applicazione della (18), ottenendo dunque la formula generale per la potenza  $n$ -esima di un numero complesso in forma polare:

$$z^n = \rho^n(\cos n\phi + i \sin n\phi). \quad (21)$$

Le formule (18)-(21) prendono il nome di *formule di De Moivre*, dal nome del matematico francese Abraham De Moivre (1667-1754) che le introdusse.

Tali formule sono intimamente legate alla definizione di prodotto di due numeri complessi (6). Infatti, la somiglianza fra la (6) e le formule di somma di coseno e seno dovrebbe saltare agli occhi. L'importante significato geometrico della moltiplicazione tra numeri complessi giustifica la scelta della definizione della moltiplicazione tra numeri complessi che è stata fatta.

## 2. Numeri complessi ed equazioni algebriche

Abbiamo accennato precedentemente al fatto che, nei complessi  $\mathbb{C}$ , è possibile calcolare radici quadrate di numeri negativi. Approfondiamo ora tale idea, discutendo il significato geometrico delle radici in  $\mathbb{C}$  e discutendo la natura delle soluzioni delle equazioni algebriche, in particolare di secondo e terzo grado.

### 2.1. Radici di numeri complessi

Una RADICE  $n$ -ESIMA di un numero complesso  $z$  è un numero complesso  $w$  tale che  $w^n = z$ . Per calcolare – e contare! – le radici  $n$ -esime di un numero complesso utilizziamo le formule di De Moivre che abbiamo visto nel paragrafo precedente.

#### 2.1.1. Il caso della radice quadrata

Per capire meglio i concetti, cominciamo con il caso, facile, delle radici quadrate.

Sia  $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$  e  $w = \sigma(\cos \theta + i \sin \theta)$ , e ricordiamoci che deve essere  $w^2 = z$ . Quindi, per De Moivre:

$$\begin{cases} \sigma^2 = \rho, \\ 2\theta = \phi. \end{cases} \quad (22)$$

Ma ricordiamoci che nella prima delle (22) sia  $\sigma$  che  $\rho$  sono  $\geq 0$ , e soprattutto che  $\theta, \phi$  sono angoli, quindi l'identità (22) vale a meno di un multiplo qualsiasi di  $2\pi$ ; in altri termini, la seconda delle (22) va interpretata nel modo seguente:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = \phi + 2k\pi; \quad (23)$$

qualsiasi  $\theta$  che soddisfa la (23) va bene. D'altra parte, dalla (23) si ricava immediatamente:

$$\theta = \frac{\phi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Ora, è cruciale osservare quanto segue. Mentre tutti gli angoli  $\phi = 2k\pi$  sono equivalenti (cioè corrispondono al medesimo punto sul piano complesso), le loro metà non lo sono più: infatti gli angoli  $\phi/2 + k\pi$  differiscono fra di loro per multipli di  $\pi$ , non di  $2\pi$ ! Quindi quando trattasi di multipli pari abbiamo angoli equivalenti, mentre quando trattasi di multipli dispari abbiamo angoli opposti (cioè che differiscono di  $\pi$ ).

Quindi a seconda che in (24) scegliamo un multiplo pari o dispari di  $\pi$  abbiamo due valori della radice quadrata di  $z$ :

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) & \text{per } k \text{ pari,} \\ w_2 = \sqrt{\rho} \left( \cos \left( \frac{\phi}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\phi}{2} + \pi \right) \right) = -\sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) & \text{per } k \text{ dispari,} \end{cases} \quad (25)$$

dove si è fatto uso delle identità trigonometriche per gli angoli che differiscono di  $\pi$  nella seconda. Quindi ogni numero complesso  $z \neq 0$  ha due radici distinte ed opposte (che ovviamente per lo zero sono la medesima radice, e cioè zero).

A rigore, la radice complessa non è una funzione. Infatti il simbolo  $\sqrt{z}$  indica entrambe le radici di  $z$ , e quindi non essendo univoco non può essere una funzione. Talvolta nell'analisi complessa si introduce la nozione di funzione a più valori per indicare tali casi: ma di questo parleremo molto più avanti. Inoltre, al contrario che nel caso reale, non è possibile sceglierne una in modo non eccessivamente arbitrario per la ragione seguente.

È opportuno spendere qualche parola sul significato del simbolo  $\sqrt{\cdot}$ . Se sotto radice appare un numero reale, allora intendiamo la usuale radice quadrata reale di un numero reale, che esiste solo per valori non negativi del suo argomento e che per convenzione si assume positiva (utilizzando la esplicita menzione del segno  $-\sqrt{\cdot}$  qualora si voglia indicare che serve la radice negativa). Se invece sotto radice appare un numero complesso, si intende la radice complessa.

**Esempio 1.** Ecco alcuni esempi elementari.

- $\sqrt{1} = \pm 1$  (visto come numero complesso). Infatti:

$$|1| = 1, \quad \arg 1 = 0 (+2k\pi),$$

per cui:

$$|\sqrt{1}| = 1, \quad \arg \sqrt{1} = k\pi,$$

e quindi otteniamo  $+1$  o  $-1$  a seconda che  $k$  sia pari o dispari.

- $\sqrt{-1} = \pm i$ . Infatti:

$$|-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi (+2k\pi),$$

per cui:

$$|\sqrt{-1}| = 1, \quad \arg \sqrt{-1} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

e quindi otteniamo  $+i$  o  $-i$  a seconda che  $k$  sia pari o dispari.

- $\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$ . Infatti:

$$|i| = 1, \quad \arg i = \frac{\pi}{2} (+2k\pi),$$

per cui:

$$|\sqrt{i}| = 1, \quad \arg \sqrt{i} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

e cioè il risultato indicato tenendo conto che  $\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ .

- $\sqrt{-i} = \pm(-1+i)/\sqrt{2}$ . (Perché...?)

Nella figura 3 abbiamo disegnato il numero complesso  $2 + 3i$  e le sue due radici quadrate. Si osservino gli angoli che corrispondono agli argomenti delle radici e del radicando.

### 2.1.2. Il caso generale

Sia ora  $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$  e  $w = \sigma(\cos \theta + i \sin \theta)$ , e ricordiamoci che deve essere  $w^n = z$ . Quindi, per De Moivre:

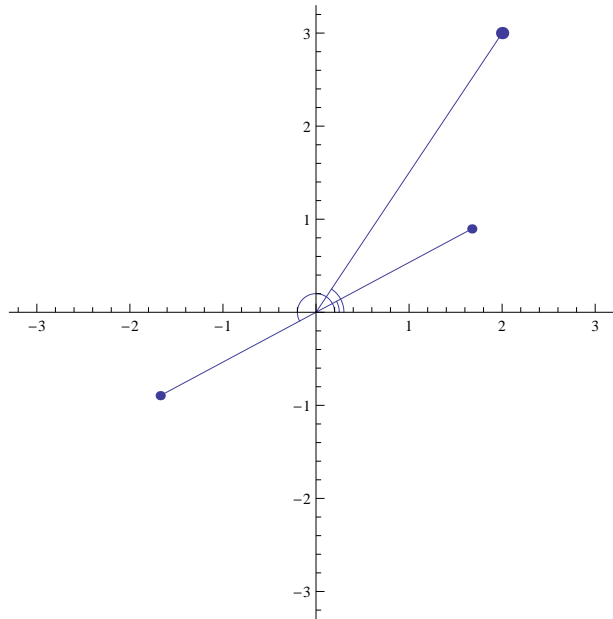
$$\begin{cases} \sigma^n = \rho, \\ n\theta = \phi. \end{cases} \quad (26)$$

Di nuovo, la seconda delle (26) vale *a meno di multipli di  $2\pi$* , ovvero va interpretata come:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n\theta = \phi + 2k\pi; \quad (27)$$

qualsiasi  $\theta$  che soddisfa la (27) va bene. D'altra parte, dalla (27) si ricava immediatamente:

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Figura 3: Le radici quadrate di  $2 + 3i$ 

Quindi, quando  $k$  varia fra 0 ed  $n - 1$  otteniamo  $n$  angoli *distinti*:

$$\theta = \frac{\phi}{n}, \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi \cdot (n-1)}{n}, \quad (29)$$

mentre il *successivo* valore:

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi \cdot n}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi \quad (30)$$

è lo stesso angolo che  $\phi/n$ , cioè il caso  $n = 0$ , e così via. Esistono quindi  $n$  radici  $n$ -esime, che differiscono da loro per una fase pari a  $2\pi/n$ , cioè per un fattore  $\cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n$ . Si osservi che il caso  $n = 2$  dà un fattore  $\cos 2\pi/2 + i \sin 2\pi/2 = -1$ , cioè due valori opposti, come trovato in precedenza e come ben noto dalle scuole inferiori.

### 2.1.3. Le radici di 1 e $-1$

Come esempio, determiniamo le radici  $n$ -esime di 1 e di  $-1$ . Cominciamo dal primo caso.

Abbiamo:

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)1, \quad (31)$$

cioè - banalmente! - 1 ha modulo 1 ed argomento 0. Quindi la sua radice  $n$ -esima deve avere modulo 1. Inoltre la fase deve essere data da:

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Al variare di  $k$  tra  $0$  e  $n - 1$  abbiamo gli  $n$  valori della radice  $n$ -esima:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (33)$$

Tali valori sono disposti sul piano complesso a formare i vertici di un  $n$ -agono regolare, iscritto al cerchio unitario, un cui vertice è nel punto che corrisponde al numero complesso  $1$  (perchè  $1$  è sempre radice  $n$ -esima di  $1$ , in quanto  $1^n = 1$  - è il caso  $k = 0$  nella (33)).

Ad esempio, le tre radici cubice dell'unità sono date da:

$$1, \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad (34)$$

(rispettivamente i casi  $k = 0, 1, 2$  con  $n = 3$  nella (33)); le quattro radici quarte dell'unità sono date da:

$$1, \quad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i. \quad (35)$$

In figura 4 abbiamo disegnato le radici quarte e quinte di  $1$ .

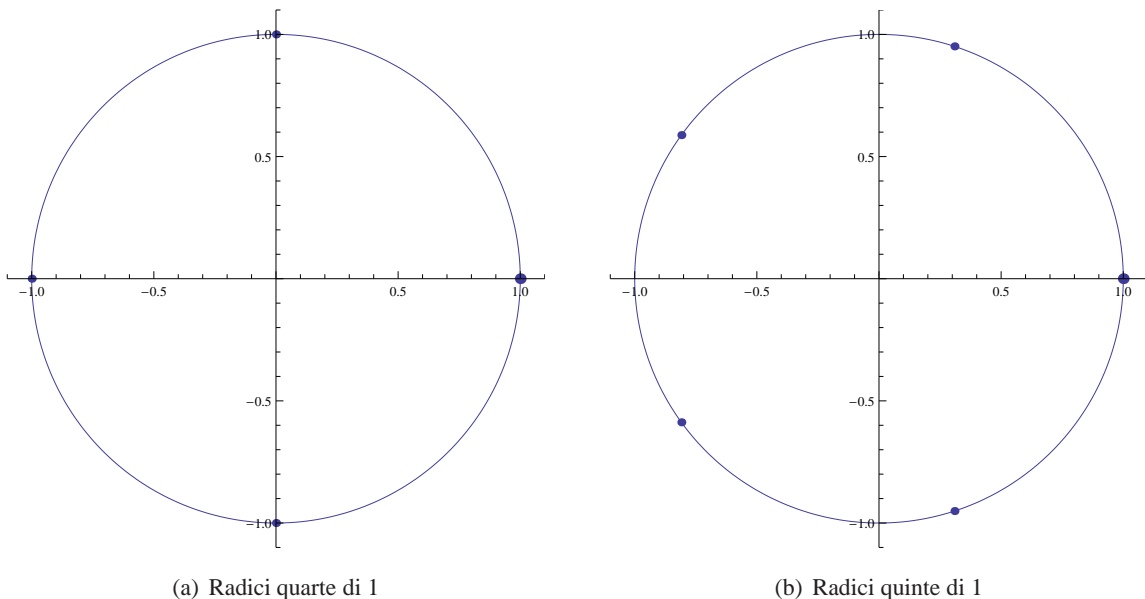


Figura 4: Radici pari e dispari di  $1$

Nel caso di  $-1$ , abbiamo invece:

$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi), \quad (36)$$

e cioè  $-1$  ha modulo  $1$  ed argomento  $\pi$ . Quindi la sua radice deve avere modulo  $1$  ed argomento dato da:

$$\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (37)$$

Tali valori sono disposti sul piano complesso a formare i vertici di un  $n$ -agono regolare, inscritto al cerchio unitario, un cui vertice è nel punto che corrisponde al numero complesso  $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$  (il caso  $k = 0$  nella (37)).

Ad esempio, le radici cubiche di  $-1$  sono date da:

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} = -1, \quad \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \quad (38)$$

le quattro radici quarte di  $-1$  sono date da:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}, \\ \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

In figura 5 abbiamo disegnato le radici quarte e quinte di  $-1$ .

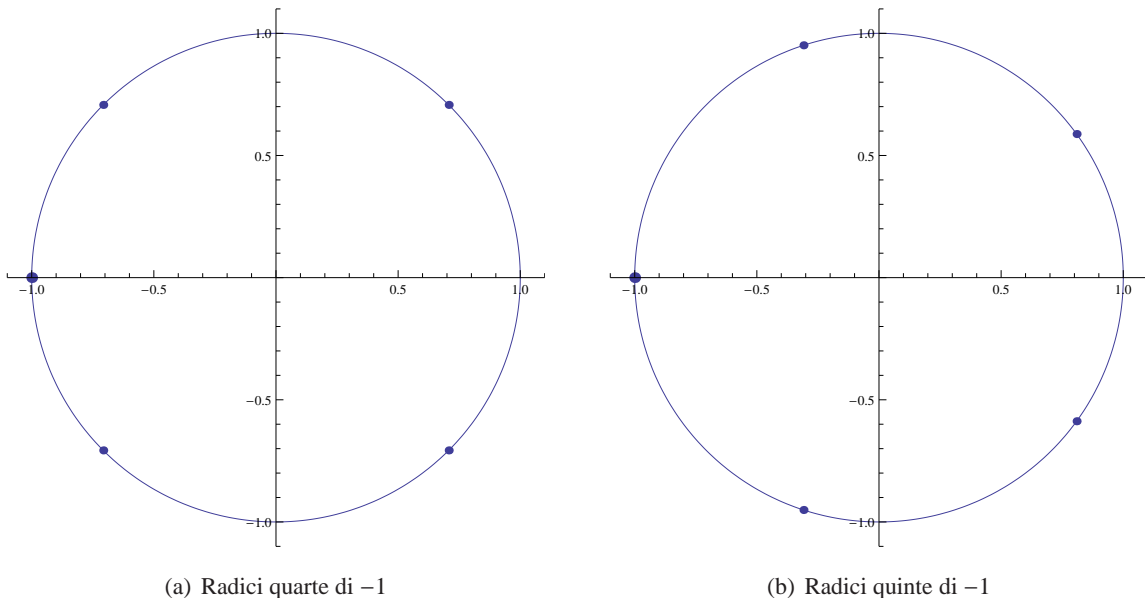


Figura 5: Radici pari e dispari di  $-1$

**Esercizio.** Disegnare sul piano complesso le radici terze e quarte di  $1$  e  $-1$  che abbiamo appena calcolato. Calcolare le radici seste di  $1$  e  $-1$  e disegnarle sul piano complesso.

## 2.2. Equazioni algebriche

L'introduzione dei numeri complessi permette non solo di calcolare radici che nell'ambito dei numeri reali non esistevano, ma permette di affermare l'importante teorema seguente.

**Teorema 1** (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni equazione algebrica possiede almeno una soluzione in  $\mathbb{C}$ .*

La dimostrazione di questo teorema, per quanto semplice, presuppone nozioni di teoria delle funzioni di variabile complessa tali che una sua dimostrazione sarà possibile solo molto più avanti.

Il teorema afferma, dunque, che *qualsiasi* equazione algebrica, di qualsiasi grado, con coefficienti qualsiasi:

$$P(z) = 0 \quad \text{dove } P(z) \text{ è un polinomio qualsiasi} \quad (40)$$

ammette una soluzione  $z_1$ :

$$P(z_1) = 0. \quad (41)$$

Sia  $n$  il grado del polinomio  $P(z)$ . Utilizzando un'elementare principio di fattorizzazione dei polinomi – noto dalle scuole superiori come “regola di Ruffini” (Paolo Ruffini, 1765-1822) – possiamo dunque dividere  $P(z)$  per il binomio  $z - z_1$  *senza resto* ed ottenere dunque:

$$P(z) = (z - z_1)Q(z) = 0, \quad (42)$$

dove  $Q(z)$  è un polinomio di grado  $n - 1$ . Questo a sua volta avrà una soluzione  $z_2$  che ovviamente per la (42) è anche soluzione di  $P(z) = 0$ ;  $Q(z)$  quindi a sua volta sarà divisibile per  $z - z_2$  generando un nuovo polinomio di grado  $n - 2$  a cui applichiamo di nuovo il teorema fondamentale dell'algebra, e così via finché possiamo dividere, cioè  $n$  volte. Otteniamo così che una equazione algebrica di grado  $n$  possiede  $n$  soluzioni, che però ovviamente possono essere in tutto o in parte coincidenti.

Non possiamo dire altro per ora sulle soluzioni di una equazione algebrica qualsiasi a coefficienti complessi. Possiamo dire qualcosa di più nel caso in cui i suoi coefficienti siano reali. Osserviamo innanzitutto che, se  $z_0$  è una soluzione di  $P(z) = 0$ , allora il suo complesso coniugato  $\bar{z}_0$  è una soluzione dell'equazione  $\bar{P}(z) = 0$ , cioè dell'equazione algebrica ottenuta con il polinomio che ha per coefficienti i complessi coniugati dei corrispondenti coefficienti di  $P$ :

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \Rightarrow \bar{P}(z) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j z^j, \quad (43)$$

$$P(z_0) = 0 \Rightarrow 0 = \overline{P(z_0)} = \bar{P}(\bar{z}_0);$$

tenendo conto che il complesso coniugato della somma è la somma dei complessi coniugati, che il complesso coniugato del prodotto è il prodotto dei complessi coniugati e che il complesso coniugato della potenza è la potenza del complesso coniugato, si tratta di un fatto assolutamente ovvio. Ora, se il polinomio  $P(z)$  ha coefficienti reali, allora  $P = \bar{P}$  e quindi abbiamo che se  $z_0$  è la soluzione di una equazione algebrica a coefficienti reali, allora anche  $\bar{z}_0$  è soluzione della medesima equazione. I casi possibili sono allora due: (i)  $z_0$  è reale, e allora  $\bar{z}_0 = z_0$  e non abbiamo in realtà un'altra soluzione, (ii)  $z_0$  non è reale, ed allora abbiamo un'altra soluzione dell'equazione, complessa coniugata della prima.

In altri termini, *le soluzioni di una equazione algebrica a coefficienti reali sono o reali, o coppie di soluzioni complesse coniugate.*

### 2.2.1. L'equazione di secondo grado

Richiamiamo ora la soluzione dell'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (44)$$

Come è ben noto fin dall'inizio delle scuole superiori, le sue soluzioni sono date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (45)$$

Infatti, "completando il quadrato" otteniamo:

$$a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0,$$

da cui otteniamo banalmente la (45) risolvendo rispetto ad  $x$ .

Immaginiamo ora che i coefficienti siano reali. Pertanto se  $\Delta = b^2 - 4ac$ , detto **DISCRIMINANTE** dell'equazione, è positivo, abbiamo due radici soluzioni distinte, se  $\Delta$  è nullo abbiamo due soluzioni reali coincidenti, mentre se  $\Delta$  è negativo abbiamo due soluzioni complesse coniugate. Se i coefficienti sono complessi, le soluzioni sono in generale complesse e possiamo solo dire che se  $\Delta = 0$  le due soluzioni coincidono.

### 2.2.2. L'equazione di terzo grado

È abbastanza elementare ricavare la formula che risolve l'equazione di terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (46)$$

Poiché  $a \neq 0$  (altrimenti l'equazione sarebbe di secondo grado!) possiamo sempre dividere ambo i membri dell'equazione per  $a$  e così ricondurci al caso  $a = 1$ , cosa che d'ora in poi assumeremo. Inoltre, mediante la sostituzione:

$$x = y - \frac{b}{3} \quad (47)$$

è possibile cancellare il termine di secondo grado, ottenendo, a calcoli svolti, l'equazione:

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0.$$

Possiamo quindi considerare equazioni cubiche della forma:

$$y^3 + py + q = 0 \quad (48)$$

senza perdere in generalità, perché a detto caso ci si può sempre ricondurre con semplici sostituzioni.

La cubica (48) può essere risolta in modo assai semplice riconducendola ad un *sistema simmetrico* di due equazioni in due variabili nel modo seguente. Poniamo:

$$y = u + v, \quad (49)$$

da cui otteniamo immediatamente:

$$y^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvy. \quad (50)$$

Sostituendo nella (48) otteniamo:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)y + q = 0. \quad (51)$$

A questo punto utilizziamo la libertà di avere a disposizione le due variabili ausiliarie  $u$  e  $v$  per realizzare che tale equazione sarà risolta se  $u$ ,  $v$  soddisfano:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -\frac{p}{3}, \end{cases} \quad (52)$$

ed elevando alla terza potenza la seconda equazione del sistema precedente otteniamo infine il sistema simmetrico *nelle due incognite*  $u^3$ ,  $v^3$ :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases} \quad (53)$$

che può essere risolto in modo elementare, riconducendolo alla soluzione di una equazione di secondo grado. Infatti, poiché  $u^3$  e  $v^3$  devono avere per somma  $-q$  e per prodotto  $-p^3/27$ , come è ben noto sono le due radici dell'equazione di secondo grado:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (54)$$

detta *risolvente* della cubica (48). Risolvendola e prendendo le radici cubiche delle soluzioni abbiamo quindi:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (55)$$

Le formule così ottenute prendono il nome di *formule di Cardano*, dal nome del matematico italiano Girolamo Cardano (1501-1576) che per primo le pubblicò nel 1545, anche se in realtà sono dovute a Scipione del Ferro (1465-1526), di cui non sono pervenute opere scritte.

Il problema, a parte la discussione del discriminante della risolvente  $q^2/4 + p^3/27$ , è il fatto che ora sappiamo che una radice cubica ha *tre* valori possibili, e che quindi nella (55) scegliendo in tutti i modi possibili i tre valori abbiamo *nove* soluzioni, un po' troppe per una equazione di *terzo* grado!

Assumendo ora che il caso che ci interessa è quello dell'equazione a coefficienti reali, discutiamo dunque il segno del discriminante  $q^2/4 + p^3/27$  e, tenendo conto della seconda delle (52), vediamo come dobbiamo scegliere le radici cubiche in modo tale che  $u \cdot v = -p/3$  sia reale.

Sia  $\varepsilon = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$ , così che  $1, \varepsilon$  e  $\varepsilon^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$  sono le tre radici cubiche di 1. Osserviamo che  $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$ . Consideriamo i tre casi possibili.

[1] Il discriminante è positivo:  $q^2/4 + p^3/27 > 0$ . Allora otteniamo per  $u^3$  e  $v^3$  due valori reali e distinti, e quindi:

$$\begin{cases} u = u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, & u = u_1 = \varepsilon u_0, & u = u_2 = \varepsilon^2 u_0, \\ v = v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, & v = v_1 = \varepsilon v_0, & v = v_2 = \varepsilon^2 v_0. \end{cases} \quad (56)$$

Otteniamo valori reali di  $uv$  (anzi, lo stesso valore reale di  $uv$ , e cioè  $-p/3$ !) solo se combiniamo  $u$  e  $v$  in uno dei tre modi seguenti:  $u_0v_0, u_1v_2$  e  $u_2v_1$  (dove ovviamente teniamo conto che  $\varepsilon^3 = 1$ !). Quindi le tre soluzioni dell'equazione di terzo grado sono:

$$\begin{cases} y_1 = u_0 + v_0, \\ y_2 = u_1 + v_2, \\ y_3 = u_2 + v_1. \end{cases} \quad (57)$$

Si verifica immediatamente che  $y_1$  è reale e  $y_2, y_3$  sono complesse coniugate.

[2] Il discriminante è nullo:  $q^2/4 + p^3/27 = 0$ . La discussione è identica alla precedente, solo che ora  $u_j = v_j$ . Pertanto  $y_2 = y_3$ , e l'unico modo per cui due numeri complessi coniugati tra loro siano uguali è che siano reali. Pertanto in tal caso abbiamo una radice reale e due radici reali coincidenti. (È banale verificare che le radici sono tutte e tre uguali solo se  $p = q = 0$  e pertanto  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ).

[3] Il discriminante è negativo:  $q^2/4 + p^3/27 < 0$ . In tal caso  $u^3, v^3$  sono due numeri complessi, coniugati fra loro. Anche le loro radici cubiche, dunque, sono numeri complessi coniugati fra loro:

$$\begin{cases} u = u_0 = \alpha + i\beta, & u = u_1 = \varepsilon u_0, & u = u_2 = \varepsilon^2 u_0, \\ v = v_0 = \alpha - i\beta, & v = v_1 = \varepsilon v_0, & v = v_2 = \varepsilon^2 v_0, \end{cases} \quad (58)$$

dove  $\alpha, \beta$  sono numeri reali. Di nuovo, gli unici modi in cui possiamo combinarli per ottenere sempre lo stesso valore reale di  $uv = -p/3$  sono  $u_0v_0, u_1v_2$  e  $u_2v_1$  (in quanto il prodotto dei due numeri complessi coniugati è reale e  $\varepsilon^3 = 1$ ). Ma come sono le tre soluzioni corrispondenti  $y_1, y_2$  e  $y_3$ ? Abbiamo:

$$\begin{cases} y_1 = u_0 + v_0 = 2\alpha \in \mathbb{R}, \\ y_2 = u_1 + v_2 = \varepsilon(\alpha + i\beta) + \varepsilon^2(\alpha - i\beta) \in \mathbb{R}, \\ y_3 = u_2 + v_1 = \varepsilon^2(\alpha + i\beta) + \varepsilon(\alpha - i\beta) \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (59)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che  $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$  e che la somma di due numeri complessi coniugati è reale. Dunque in questo caso *le tre soluzioni sono reali e distinte!*. Osserviamo che è proprio nel caso in cui il discriminante è negativo, per cui è *impossibile* risolvere l'equazione di terzo grado senza passare per i numeri complessi, che le tre soluzioni sono reali e distinte. Per questa ragione il caso del discriminante negativo per l'equazione di terzo grado fu detto da Cardano *casus irriducibilis* e sostanzialmente portò all'introduzione dei numeri complessi.

**Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado:

1.  $x^3 - 4x^2 - 22x + 52 = 0$ ,
2.  $27x^3 + 54x^2 - 45x + 8 = 0$ ,
3.  $2x^3 - 10x^2 + 15x - 9 = 0$ .

### 3. Trasformazioni del piano complesso

Consideriamo ora una funzione di variabile complessa a valori complessi  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ . Tale funzione può essere interpretata – se il dominio è l'intero piano complesso  $\mathbb{C}$  eccetto al massimo qualche punto – come una trasformazione del piano complesso, cioè come una specie di “deformazione” che “sposta” i punti del piano complesso. Ad es. la funzione  $f(z) = -z$  riflette i punti sul piano rispetto all'origine, mentre la funzione  $f(z) = \bar{z}$ , cambiando segno alla sola coordinata  $y$ , riflette i punti del piano complesso rispetto all'asse reale. Questo modo di vedere “geometricamente” le funzioni di una variabile complessa è molto utile e verrà utilizzato in corsi successivi.

**Esercizio.** Quale funzione riflette i punti del piano complesso rispetto all'asse immaginario?

Noi considereremo solo alcune semplicissime trasformazioni del piano complesso, in quanto si tratta di un argomento in realtà abbastanza avanzato e piuttosto profondo che verrà trattato alla fine dei corsi di analisi.

#### 3.1. Trasformazioni lineari

Le trasformazioni lineari *del piano complesso* sono quelle date da funzioni del tipo:

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (60)$$

È importante osservare che queste *non sono le più generali trasformazioni lineari del piano*, ma solo quelle realizzate mediante operazioni algebriche sui numeri complessi visti come punti del piano.

Se  $a = 0$ , abbiamo una TRASLAZIONE: il punto rappresentato dal numero complesso  $z$  si sposta nel punto  $z + b$ . Se poniamo  $b = b' + ib''$ , allora le coordinate che rappresentano  $z$  vengono incrementate rispettivamente di  $b'$  e  $b''$ .

Se  $b = 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ , allora *entrambe* le coordinate di ciascun punto vengono moltiplicate per un fattore  $a$ : chiaramente se  $0 < a < 1$  si tratta di una CONTRAZIONE, se  $a > 1$  si tratta di una ESPANSIONE, se  $a = 1$  non cambia nulla, se  $a = 0$  tutti i punti vengono mandati nell'origine (e non abbiamo dunque una "buona" trasformazione del piano...) mentre se  $a < 0$  la nostra trasformazione è la composta di  $z \mapsto -z$  e di  $z \mapsto (-a)z$  con  $-a > 0$ , cioè la composta di una dilatazione o espansione composta con una riflessione.

Sia ora  $b = 0$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$ . In tal caso  $a = \cos \theta + i \sin \theta$  e quindi la moltiplicazione per  $a$ , per la formula di De Moivre, rappresenta una ROTAZIONE di un angolo  $\theta$  nel piano complesso.

Il caso generale  $az + b$  può essere ricondotto alla composizione dei casi precedenti, ponendo  $a = |a| \cdot (\cos \arg a + i \sin \arg a)$  e dunque alla composizione di una traslazione – determinata da  $b$  –, di una dilatazione – determinata da  $|a|$  – e di una rotazione – determinata da  $\arg a$ .

### 3.2. Trasformazioni lineari-frazionarie

Le TRASFORMAZIONI LINEARI-FRAZIONARIE SONO le trasformazioni del piano complesso realizzate da funzioni della forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (61)$$

dove  $ad - bc \neq 0$  (altrimenti la frazione si semplificherebbe in una costante in quanto numeratore e denominatore sarebbero proporzionali).

L'inversa di una trasformazione lineare-frazionaria è ancora lineare-frazionaria ed è molto facile da calcolare. Infatti, ponendo  $\zeta = (az + b)/(cz + d)$ , abbiamo:

$$c\zeta + d\zeta = az + b, \quad (62)$$

da cui:

$$(c\zeta - a)z = -d\zeta + b, \quad (63)$$

e quindi:

$$z = \frac{-d\zeta + b}{c\zeta - a}. \quad (64)$$

Si osservi che se  $ad = bc$  allora è impossibile passare dalla (63) alla (64) perché sparisce  $\zeta$  dalla (63)!

Tali trasformazioni sono importanti per una quantità di ragioni, tra cui la seguente.

**Teorema 2.** *L'insieme di tutte le rette e di tutti i cerchi nel piano complesso è trasformato nell'insieme di tutte le rette e di tutti i cerchi sotto l'azione di una trasformazione lineare-frazionaria.*

In altri termini, data una retta o un cerchio qualsiasi nel piano complesso, se facciamo agire su di esso una trasformazione lineare frazionaria, otterremo di nuovo o una retta o un cerchio.

*Dimostrazione.* Dobbiamo innanzitutto scrivere l'equazione generale della retta e del cerchio nel piano complesso, cioè usando non le coordinate  $x, y$  ma la "coordinata complessa"  $z$ .

Una retta nel piano complesso può essere scritta come:

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0, \quad (65)$$

dove  $\beta = \beta' + i\beta'' \in \mathbb{C}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Infatti  $\beta z + \overline{\beta z} = 2 \operatorname{Re}(\beta z) = 2\beta'x - 2\beta''y$  e quindi abbiamo proprio l'equazione di una retta. L'equazione in un cerchio in  $\mathbb{C}$  invece è data da:

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0, \quad (66)$$

dove  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{C}$ ; basta infatti tenere conto che  $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ . Ora, osserviamo che la (66) è piú generale della (65), che altro non è che il caso  $a = 0$  della (66). Quindi per dimostrare l'asserto basta dimostrare che qualsiasi curva sul piano complesso di equazione (66) diventa, dopo l'applicazione di una trasformazione lineare-frazionaria, una curva del medesimo tipo, con altri coefficienti.

Poniamo allora:

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (67)$$

la cui inversa è data dalla (64). Sostituendo dunque la (64) nella (66) otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma &= \alpha \left( \frac{-d\zeta + b}{c\zeta - a} \right) \overline{\left( \frac{-d\zeta + b}{c\zeta - a} \right)} + \beta \frac{-d\zeta + b}{c\zeta - a} + \overline{\beta} \overline{\left( \frac{-d\zeta + b}{c\zeta - a} \right)} + \gamma = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha(-d\zeta + b)\overline{(-d\zeta + b)} + \beta(-d\zeta + b)\overline{(c\zeta - a)} + \overline{\beta}(-d\zeta + b)(c\zeta - a) + \gamma(c\zeta - a)\overline{(c\zeta - a)} = \\ &= \tilde{\alpha}\zeta\bar{\zeta} + \tilde{\beta}\zeta + \overline{\tilde{\beta}}\bar{\zeta} + \tilde{\gamma} = 0, \quad (68) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = d^2\alpha - \beta\bar{c}d - \bar{b}c\bar{d} - \gamma c\bar{c} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\beta} = -\alpha d\bar{b} + \beta d\bar{a} + \beta c\bar{c} - \gamma c\bar{a} \in \mathbb{C}, \\ \tilde{\gamma} = \alpha b\bar{b} - \beta b\bar{a} - \bar{\beta} b\bar{a} + \gamma a\bar{a} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (69)$$

Abbiamo dunque ottenuto che *nella nuova variabile  $\zeta$ , l'equazione del luogo geometrico ottenuta è ancora l'equazione di una retta o di un cerchio*, a seconda che  $\tilde{\alpha} = 0$  o meno.  $\square$

Ovviamente non è detto un cerchio si trasformi in cerchio ed una retta si trasformi in retta: abbiamo solo ottenuto che una l'insieme di tutte le rette e cerchi si trasforma nell'insieme di tutte le rette e cerchi, con possibili "scambi".

**Esercizio.** In cosa si trasformano gli assi coordinati nel piano complesso:

$$\operatorname{Im}(z) = 0, \quad \operatorname{Re}(z) = 0$$

sotto l'effetto della trasformazione  $\zeta = 1/z$ ?

**Esercizio.** Determinare in cosa si trasforma l'asse reale sotto l'azione della trasformazione:

$$\zeta = \frac{z+i}{z-i}. \quad (70)$$

**Esercizio.** Determinare in cosa si trasforma l'asse immaginario sotto l'azione della trasformazione:

$$\zeta = \frac{z+1}{z-1}. \quad (71)$$

**Esercizio.** Determinare in cosa si trasforma il cerchio unitario  $|z| = 1$  sotto l'azione della trasformazione (71).

### 3.3. Altre trasformazioni del piano complesso

Lo studio delle proprietà geometriche di altre trasformazioni del piano complesso, sia pure restringendosi alle semplici operazioni viste fino ad ora (potenze, radici) è relativamente complicato, anche se risulta molto utile in una quantità di problemi pure legati ad applicazioni concrete dell'Analisi Matematica, ad es. nei problemi di elettrostatica nel piano. Pertanto il loro studio viene rimandato alla fine dei corsi di Analisi Matematica.